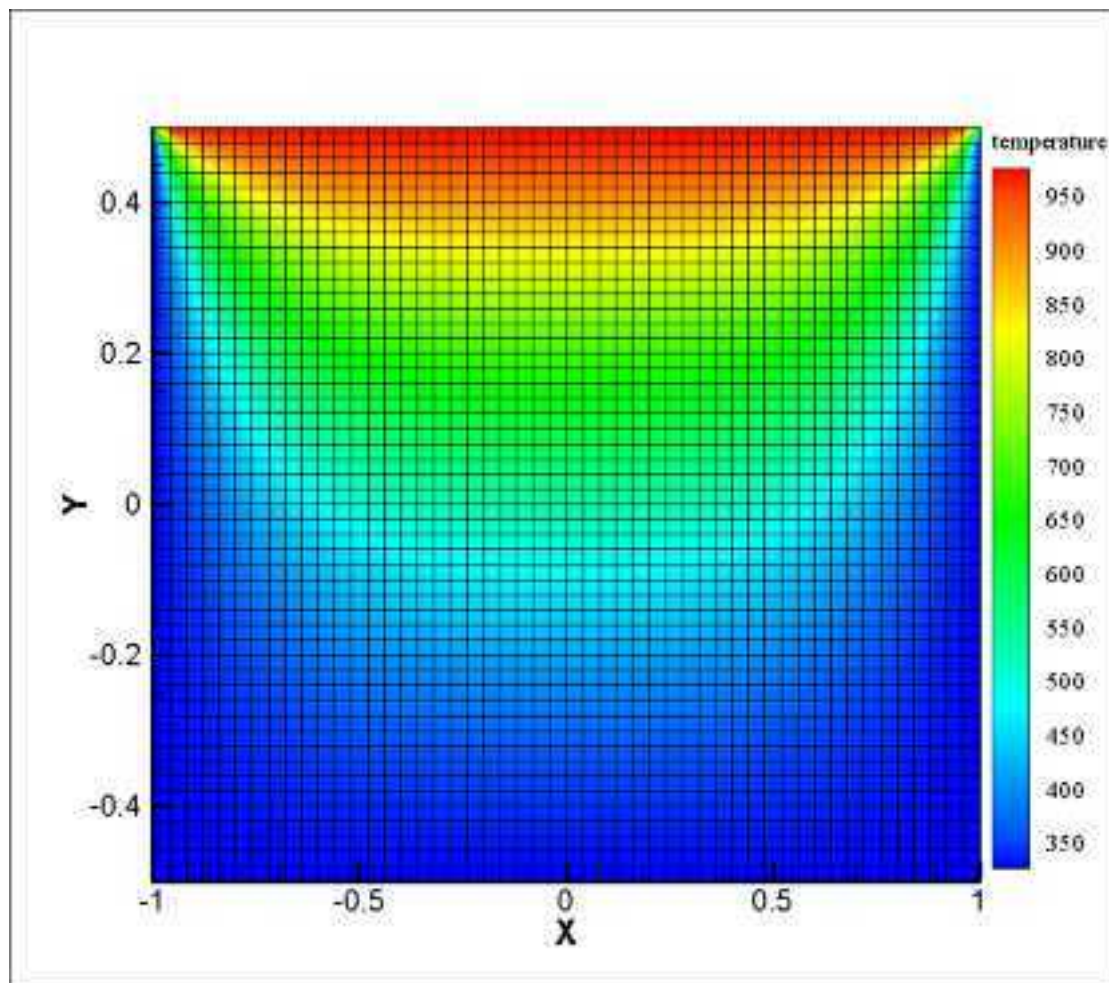


# METHODES NUMERIQUES ET MATHEMATIQUES APPLIQUEES AVANCEES

Par : Dr. Rafik Bouakkaz



**Académie Militaire de Cherchell**  
**Département Science et Technologie**  
**E-mail : r.bouakkaz@gmail.com**

# Avant-propos

Ce document est une version augmentée et regroupée des notes de deux cours enseignés à l'académie militaire de Cherchell, respectivement en première année et en deuxième année de master de propulsion et énergétique. Ces enseignements se composent à la fois de cours magistraux et de séances de travaux dirigés construites autour d'exemples et des exercices à résoudre ce qui permettra d'apprendre tout en appliquant.

L'objectif de ce travail est de présenter la méthode des volumes finis et d'étudier des schémas numériques adaptés à la simulation de certains problèmes intervenant en mécanique des fluides, ainsi que d'introduire aux étudiants les techniques mathématiques de la résolution numérique des équations à dérivées partielles (E.D.P.) interviennent dans de nombreux domaines de physique.

Il est à noter que la méthode des volumes finis consiste à subdiviser le domaine en petit volumes, puis d'intégrer les équations de conservation sur chacun de ces volumes finis (volume de control). Les valeurs des variables de l'écoulement pour chaque volume de control sont définies au centre du volume tandis qu'au niveau des surfaces de ces volumes, on utilise des schémas d'interpolation pour les évaluer. Cette méthode permet de prendre en compte la présence d'obstacles dans l'écoulement des fluides et garantit la conservation de masse et de quantité de mouvement dans tout le domaine de calcul. Un autre avantage de cette méthode sur les différences finies est qu'elle s'adapte facilement à des géométries complexes qui interviennent dans de nombreux problèmes industriels.

Ce polycopié s'organise en quatre chapitres présentés dans la suite.

Le premier chapitre sera consacré à l'exposer de la méthode des volumes finis pour le problème de la diffusion pure.

Le deuxième chapitre sera consacré à l'exposer de la méthode des volumes finis pour le problème de la conduction instationnaire.

L'objet du troisième chapitre sera l'utilisation de la méthode des volumes finis pour le problème stationnaire de diffusion-convection.

Le quatrième chapitre, concerne la résolution des systèmes d'équation (Navier-Stokes) en utilisant l'algorithme de correction de pression SIMPLE.

## Chapitre 1

### 1. Problème stationnaire de diffusion pure

#### 1.1- Introduction

Les méthodes des volumes finis ont été parmi les premières à atteindre un stade de développement avancé pour les calculs d'écoulements stationnaires et instationnaires. Elles ont permis une prise en compte complète des effets de non linéarité et de compressibilité ainsi que les effets de viscosité à l'aide des équations de Navier-Stokes, et de turbulence. Les méthodes aux volumes finis ont supplanté les méthodes classiques basées sur les différences finies dans le traitement des problèmes complexes notamment tridimensionnels. La technique comprend trois étapes importantes :

- 1- le maillage : il consiste à diviser le domaine en plusieurs intervalles réguliers appelés volumes de contrôle.
- 2- La discrétisation : lors de cette étape les équations sont intégrées dans les volumes de contrôle.
- 3- Solution des équations

#### 1.2 Etude d'un problème de diffusion à une dimension

Soit le problème de transport de la variable  $\phi$  par diffusion régi par l'équation suivante :

$$\text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) + S_\phi = 0 \quad (1.1)$$

Où :  $\Gamma$  est le coefficient de diffusion et  $S$  le terme source.

A une dimension, l'équation (1.1) prend la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + S = 0 \quad (1.2)$$

#### Etape 1 : Maillage

La première étape dans cette méthode consiste à diviser le domaine de calcul en un nombre fini et discret de volume de contrôle (non nécessairement uniforme). L'opération consiste à subdiviser le domaine de calcul (Ligne AB) en un certain nombre de segments (Volume de contrôle). Le centre de chaque volume (P) est placé exactement au milieu du segment correspondant, figure 1.1.

Il est commode de s'arranger pour que les facettes des nœuds de frontières coïncident exactement avec les frontières du domaine de calcul.

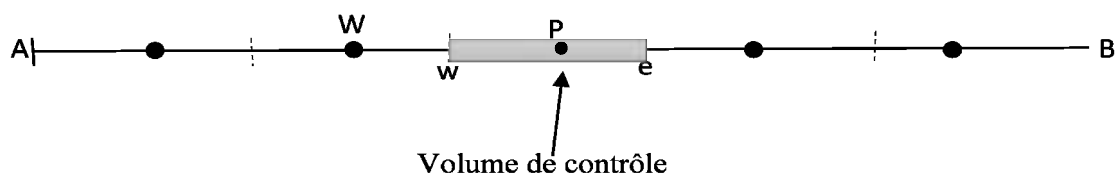


Figure 1.1 : Maillage unidimensionnel

Dans le cas de la figure 1.1 le domaine de calcul est divisé en cinq volumes de contrôles.

Système de notation :

La valeur de  $\theta$  maintenue constante aux frontières. E et W sont appelés ‘ Est ‘ et ‘ Ouest ‘.

P, E et W sont appelés nœuds et  $\Delta x$  le pas., figure 1.2.

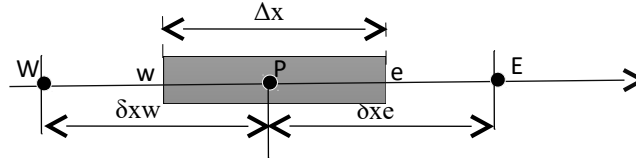


Figure 1.2 : Zone d’intégration de la méthode aux volumes finis pour un problème 1D

**Etape 2 : Discrétisation**

L’intégration de l’équation (1.2) donne :

$$\left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w + \int_w^e S dx = 0 \tag{1.3}$$

Soit :

$$\Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_e} - \Gamma_w \frac{\phi_E - \phi_W}{\delta x_w} + \dot{S} = 0 \tag{1.4}$$

Où  $\dot{S}$  est une valeur moyenne du terme source sur le volume de contrôle.

En général, le terme source peut dépendre de la fonction  $\phi$  elle-même. C’est pourquoi on l’écrit :

$$\dot{S} = S_u + S_p \phi_P \tag{1.5}$$

L’équation (1.3) peut se mettre sous la forme :

$$a_P \phi_P = a_e \phi_E + a_w \phi_W + S_u \tag{1.6}$$

Avec :  $a_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_e}$ ;  $a_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_w}$ ;  $a_P = a_e + a_w - S_p \Delta x$ ;  $S_u = S_c \Delta x$

Les volumes de contrôle étant choisis réguliers, on peut supposer que le nœud P occupe une position d’indice i, le nœud W, la position d’indice i-1, le nœud E, la position d’indice i+1, etc. L’équation (1.6) peut donc se mettre sous la forme suivante :

$$a_i \phi_i = a_{i-1} \phi_{i-1} + a_{i+1} \phi_{i+1} + S_u \tag{1.7}$$

L’équation (1.7) est donc construite pour tous les volumes de contrôle du domaine d’intégration qui ne sont pas influencés par les conditions aux limites. Afin de tenir compte des conditions aux limites, un traitement spécial est réservé aux nœuds se trouvant aux frontières. Le système d’équations résultant est un système d’équations algébriques linéaires comportant autant d’équations que d’inconnues.

**Etape 3 : Solution des équations**

La distribution discrète de la variable  $\theta$  sur le domaine de calcul peut alors être obtenue

par les méthodes directes de résolution des systèmes d'équations linéaires : inversion de la matrice du système, méthode des déterminants,...

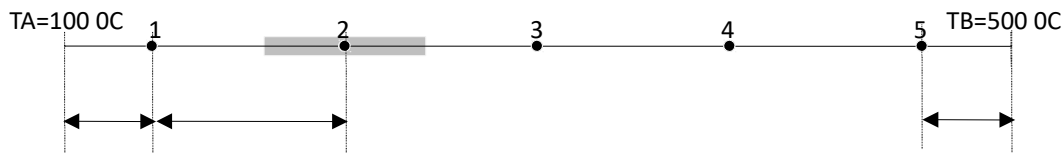
Cependant, on préfère les méthodes itératives telles que la méthode de Gauss-Seidel ou la méthode de Jacobi qui sont bien adaptées pour ce genre de systèmes à matrice bande. Mais comme pour tout calcul itératif, il faudra alors définir un critère de convergence pour pouvoir arrêter les calculs à un moment donné.

**Remarque :** L'énoncé des exercices ci-dessous est inspiré du cours de [1].

**Exercice 1.1 :**

On considère une barre cylindrique, sans source de chaleur, ayant l'aire transversale  $A=0.01 \text{ m}^2$  et la longueur  $L = 0.5 \text{ m}$ . Les extrémités,  $A$  et  $B$  de la barre sont maintenues aux températures constantes de  $100 \text{ }^\circ\text{C}$  et de  $500 \text{ }^\circ\text{C}$  respectivement. Calculer la distribution de la température le long de la barre en utilisant un maillage à 5 nœuds.

Données :  $\lambda=1000 \text{ W/m/K}$



**Solution**

La distribution de la température est gouvernée par l'équation :

$$\frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) + S = 0 \tag{1.8}$$

Le domaine d'analyse est divisé en cinq nœuds, donc :

$$\Delta x = \frac{L}{5} = 0.1 \text{ m}$$

Pour les nœuds intérieurs (2, 3 et 4) l'équation discrétisée est :

$$a_p T_p = a_e T_e + a_w T_w \tag{1.9}$$

Où  $a_e = \frac{\lambda}{\Delta x}$ ;  $a_w = \frac{\lambda}{\Delta x}$ ;  $a_p = a_e + a_w - S_p \Delta x$ ;  $b = S_c \Delta x$

L'expression des coefficients est donnée dans le tableau ci-dessous.

$a_e$	$a_w$	$a_p$		$S_u$
$\frac{\lambda A}{\Delta x}$	$\frac{\lambda A}{\Delta x}$	$a_e + a_w - S_p$	0	0

Les nœuds frontières nécessitent un traitement spécial pour l'implémentation des conditions aux limites. Le coefficient de la face considérée est annulé (coupant la liaison avec la frontière) et le flux à travers cette frontière est introduit sous forme de source  $S_u$  ou  $S_p$ .

Nœud 1 :  $T_w = T_A$

L'équation (1.4) devient :

$$\lambda A \frac{(T_E - T_P)}{\Delta x} - \lambda A \frac{(T_P - T_A)}{\frac{\Delta x}{2}} = 0$$

Et après arrangement :

$$P = \underbrace{\frac{\lambda}{\Delta x}}_{\dot{}} T_E + 0 T_W + \underbrace{\frac{2\lambda}{\Delta x}}_{\dot{}} T_A \quad (1.10)$$

Ou encore :  $a_p T_p = a_e T_E + a_w T_A + S_u$

Avec :  $a_p = a_e + a_w - S_p$

Que l'on peut écrire avec les notations :

$a_E$	$a_W$	$a_P$	$S_P$	$S_U$
$\frac{\lambda}{\Delta x}$	0	$a_E + a_W - S_P$	$\frac{-2\lambda}{\Delta x}$	$\frac{2\lambda}{\Delta x} T_A$

Nœud 5 :  $T_e = T_B$

De façon similaire, l'équation (1.4) devient :

$$\lambda A \frac{(T_P - T_B)}{\frac{\Delta x}{2}} - \lambda A \frac{(T_E - T_P)}{\Delta x} = 0$$

Et après arrangement :

$$P = \underbrace{\frac{\lambda}{\Delta x}}_{\dot{}} T_W + 0 T_W + \underbrace{\frac{2\lambda}{\Delta x}}_{\dot{}} T_B \quad (1.11)$$

Avec :  $a_p T_p = a_e T_E + a_w T_A + S_u$

$a_E$	$a_W$	$a_P$	$S_P$	$S_U$
0	$\frac{\lambda}{\Delta x}$	$a_E + a_W - S_P$	$\frac{-2\lambda}{\Delta x}$	$\frac{2\lambda}{\Delta x} T_B$