# MOUVEMENT

# RAYONNEMENT

# PHOTONS

# ATOMES
# ET
# MOLECULES

J-F CAVELLIER

ISBN : 979-10-424-1425-2

Dépôt légal : Janvier 2024 N° : DLE-20240111-1969

# AVANT-PROPOS.

"Votre cours m'a permis de comprendre ce que j'ai appris en physique au lycée et m'a montré qu'en physique tout se tient."

C'est ce que m'a dit une étudiante en première année de médecine, qui avait obtenu son bac C l'année précédente avec la mention très bien. Cette confidence m'a conforté dans la conviction, acquise après deux décennies d'enseignement de physique, biophysique et physique médicale en faculté de médecine : la physique enseignée au lycée est mal ou pas comprise et laisse peu d'empreinte dans l'esprit des étudiants qui ne suivent pas une filière de sciences physiques, même s'ils ont brillamment réussi leur épreuve de physique au baccalauréat.

Suite à ce constat, j'avais, élaboré un cours de rappels et compléments de physique à l'usage d'étudiants non-physiciens. En outre, mes collègues chimistes et biochimistes de la faculté de Poitiers m'avaient demandé de concevoir un cours de physique atomique présentant les bases physiques de la chimie. Ce livre est une reprise, profondément révisée et enrichie, des polycopiés qui servaient de support à mon cours oral. Les développements que j'ai introduits dans cet ouvrage lui permettent de s'adresser à un plus large public d'étudiants : licences scientifiques (physique, chimie, biologie), classes préparatoires, PACES.

Les mathématiques que j'utilise sont essentiellement celles des options maths-physique de terminales. Mais je m'affranchis de certaines consignes et conventions : j'écris les dérivées en notation différentielle, car cela permet de mener les calculs plus facilement et intuitivement, et je n'écris pas les équations en italiques, car cela améliore leur lisibilité.

Par ailleurs, j'utilise quelques outils mathématiques inconnus au lycée, après les avoir définis et explicités sommairement, comme le produit vectoriel, les fonctions de plusieurs variables et leurs dérivées partielles. Le produit vectoriel permet d'introduire simplement le moment cinétique, nécessaire à la compréhension des nombres quantiques atomiques, et les fonctions de plusieurs variables permettent de définir correctement l'énergie potentielle, et d'appréhender le formalisme de l'équation de Schrödinger. Mais je ne suis pas trop sourcilleux à propos des définitions et démonstrations : je fais souvent plus appel à l'intuition du lecteur qu'à la rigueur mathématique. Ceci dit, il est possible de passer les démonstrations mathématiques qui émaillent mon texte, et d'accepter simplement leurs résultats.

J'ai fait le maximum pour que le texte puisse se lire de façon continue, sans rupture du fil de l'argumentation. Contrairement à beaucoup de livres de cours, je n'ai pas parsemé l'ouvrage d'encadrés qui détournent l'attention du lecteur. Les figures et tableaux sont insérés dans le texte à l'endroit où ils sont mentionnés, ce qui a soulevé quelques difficultés de mise en page.

Plusieurs chapitres, présents dans beaucoup de livres de cours, ont été volontairement négligés, comme l'analyse dimensionnelle et la présentation des systèmes d'unités de mesure. Ce sujet est traité dans la plupart des cours de physique et je le suppose connu et compris. Les unités que j'utilise sont implicitement toujours celles du système international ou MKSA et les angles mesurés en radians, sauf exceptions signalées (électron-Volt pour les énergies atomiques, Debye pour les moments dipolaires, etc.).

Enfin je ne propose que quelques exercices et QCM d'application. Ceci rompt avec une tradition qui me parait plutôt nocive : j'ai pu constater que beaucoup d'étudiants étaient à tel point obnubilés par les exercices et les problèmes censés les préparer à leurs examens ou à leurs concours, qu'ils en négligeaient l'étude du cours pour ingurgiter des masses d'annales et d'épreuves corrigées. La question de la mauvaise compréhension de la physique enseignée au lycée me semble aussi avoir à faire avec cette obsession des exercices : les lycéens préparent l'épreuve du bac plus qu'ils n'étudient la physique, et les enseignants sont engagés à enseigner des protocoles de résolution d'exercices plutôt que la physique elle-même. J'exagère à peine : j'ai eu l'occasion de discuter avec un professeur de lycée qui avait infligé une mauvaise note à un élève, alors qu'à mon sens celui-ci avait bien résolu l'exercice proposé, mais "il n'avait pas respecté le protocole" … Pourtant, il avait fait preuve d'originalité inventive et d'une bonne compréhension de la question posée.

Donc peu d'exercices dans ce livre, certains cependant sont destinés à apporter des compléments au cours, par exemple pour définir les forces d'inertie ou pour illustrer le passage d'un spectre en fréquences à un spectre en longueurs d'onde.

Mon souhait est que les étudiants acquièrent à la lecture de mon livre une bonne compréhension des bases de la physique atomique et moléculaire que ceux qui poursuivront des études de physique ou de chimie approfondiront ultérieurement, mais qui pourra suffire aux étudiants en biologie ou en médecine.

L'image de couverture a été réalisée par DigialArtist en utilisant l'intelligence artificielle.

# PREMIERE PARTIE

MECANIQUE CLASSIQUE DU POINT

LOIS DE CONSERVATION

ENERGIE

APPLICATIONS :

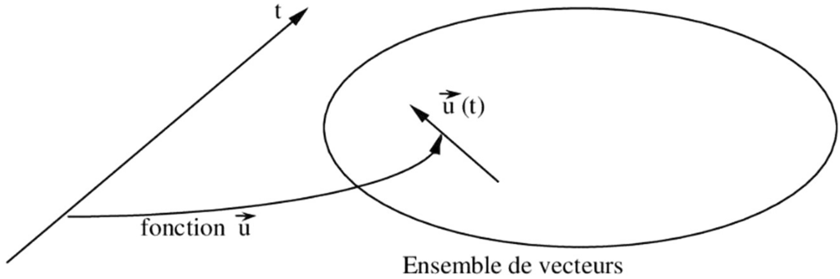
INTERACTIONS, COLLISIONS, EMISSIONS, OSCILLATIONS.

ELEMENTS DE RELATIVITE

# 1 CINEMATIQUE DU POINT.

## 1.1 Les outils mathématiques permettant de représenter et étudier le mouvement d'un point matériel.

Un vecteur peut être fonction d'une variable numérique. Ainsi, un vecteur $\vec{u}$ peut être fonction du temps (t) :




A toute valeur de t appartenant au domaine de définition de la fonction, on associe un vecteur $\vec{u}$ (t). C'est bien la définition mathématique d'une fonction.

On peut donc calculer, pour un accroissement $\Delta t$ de t, le vecteur :

$$\frac{\vec{u}\,(t+\Delta t) - \vec{u}\,(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t}$$

où $\Delta\vec{u}$ représente la variation de $\vec{u}$ produite par la variation $\Delta t$ de t.

On sait calculer la différence de deux vecteurs $\vec{u}\,(t+\Delta t) - \vec{u}\,(t)$ et diviser le vecteur résultat par le nombre $\Delta t$. On peut ensuite faire tendre $\Delta t$ vers 0, ce qui fait tendre également $\Delta\vec{u}$ vers $\vec{0}$ (si $\vec{u}$ (t) est un vecteur sympathique) et chercher la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t}$.

Lorsque la fonction $\vec{u}$ (t) est une "bonne fonction", le vecteur :

$$\frac{\vec{u}(t+\Delta t)-\vec{u}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t}$$

tend vers un vecteur limite noté $\frac{d\vec{u}}{dt}$ qui est la dérivé de $\vec{u}(t)$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{u}\,'(t)$$

Ce vecteur dérivé existe bien, il suffit pour s'en convaincre de remarquer qu'on peut projeter le vecteur $\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t}$ sur les trois axes de coordonnées Ox, Oy, et Oz. Si l'on note $u_x$, $u_y$ et $u_z$ les trois composantes de $\vec{u}$, les composantes de $\frac{\vec{u}(t+\Delta t)-\vec{u}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{u}(t)}{\Delta t}$ sont :

$$\frac{u_x(t+\Delta t) - u_x(t)}{\Delta t} \quad \text{sur Ox}$$

$$\frac{u_y(t+\Delta t) - u_y(t)}{\Delta t} \quad \text{sur Oy}$$

$$\frac{u_z(t+\Delta t) - u_z(t)}{\Delta t} \quad \text{sur Oz}$$

Ces trois expressions tendent respectivement vers les dérivées de $u_x(t)$, $u_y(t)$ et $u_z(t)$, soit :

$$\frac{du_x(t)}{dt}, \quad \frac{du_y(t)}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{du_z(t)}{dt} \; :$$

**Les composantes du vecteur dérivé sont les dérivées (numériques) des composantes du vecteur fonction de t.** Ceci donne un moyen de calculer effectivement le vecteur dérivé, et montre qu'on peut appliquer aux fonctions vectorielles les règles de dérivation des fonctions numériques (à quelques exceptions près : la division par un vecteur n'existe pas) :

$$\frac{d\left(\vec{u}(t)+\vec{v}(t)\right)}{dt} = \frac{d\vec{u}(t)}{dt} + \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

$$\frac{da.\vec{u}(t)}{dt} = a.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}$$

où a est un nombre constant.

$$\frac{df(t).\vec{u}(t)}{dt} = \frac{df(t)}{dt}\,\vec{u}(t) + f(t)\,\frac{d\vec{u}(t)}{dt}$$

et pour le produit scalaire :

$$\frac{d\left(\vec{u}(t).\vec{v}(t)\right)}{dt} = \frac{d\vec{u}(t)}{dt}\,\vec{v}(t) + \vec{u}(t)\,\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

Ayant défini la dérivée d'une fonction vectorielle d'une variable numérique, on peut aussi définir la primitive d'une telle fonction vectorielle. La primitive $\overrightarrow{U(t)}$ de la fonction $\overrightarrow{u(t)}$ est une fonction vectorielle telle que : $\frac{d\vec{U}(t)}{dt} = \vec{u}(t)$ que l'on note : $\vec{U}(t) = \int \vec{u}(t)dt$

Remarque : comme pour les fonctions numériques, si une fonction vectorielle possède une primitive, toutes les fonctions obtenues en ajoutant une constante vectorielle à cette primitive sont également des primitives, puisque la dérivée d'une constante est nulle !

Si $\vec{U}(t)$ est une primitive de $\vec{u}(t)$, $\vec{U}(t)+\vec{K}$, où $\vec{K}$ est un vecteur constant, en est également une primitive de $\overrightarrow{u(t)}$.

Pour calculer la dérivée ou la primitive d'un vecteur, on utilise les mêmes procédés (ou presque) que pour les fonctions numériques aux réserves près évoquées ci-dessus.

Par exemple, la primitive d'un vecteur constant $\vec{A}$ est :

$$\int \vec{A}dt = \vec{A}.t + \vec{K}$$

Le vecteur $\vec{K}$, constante d'intégration, est la valeur de la primitive pour t = 0 (valeur initiale).

Ce résultat est facile à démontrer en "passant" aux composantes (numériques) $A_x$ , $A_y$ et $A_z$.

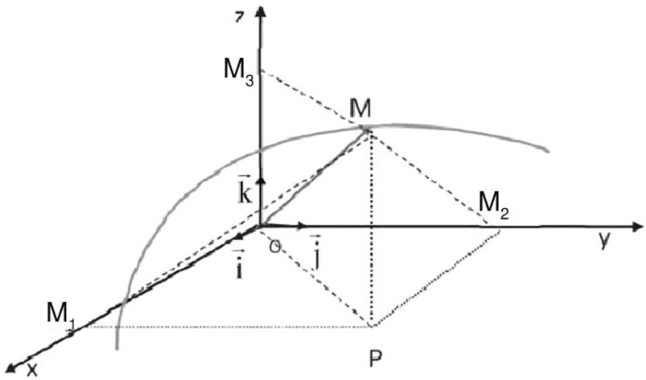
De même, on peut "intégrer" formellement la fonction $\vec{A}.t + \vec{K}$ obtenue précédemment :

$$\int (\overrightarrow{A}.t + \overrightarrow{K})dt = \frac{1}{2}\overrightarrow{A}.t^2 + \overrightarrow{K}.t + \overrightarrow{K_0}$$

où $\overrightarrow{K_0}$ est une deuxième constante d'intégration.

## 1.2 Localisation d'un point mobile. Représentation du mouvement. Définition de la vitesse.

Pour repérer et définir la position d'un point mobile M, on peut choisir un point fixe O qui sera supposé immobile (problème : l'immobilité est relative …), et définir la position de M par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ qui dépend du temps lorsque M se déplace. Ceci peut suffire pour décrire le mouvement de M. Mais on peut aussi faire le choix (arbitraire) d'axes de référence Ox, Oy, Oz orthonormés dont les vecteurs unitaires sont appelés $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ :




On voit sur la figure que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est égal à la somme des trois composantes vectorielles $\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}$ et $\overrightarrow{OM_3}$ où $M_1$, $M_2$ et $M_3$ sont les projections de M sur les trois axes. Par définition des coordonnées x, y, z de M, on a :

$$\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i},\ \overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}\ \text{ et }\ \overrightarrow{OM_3} = z\vec{k}$$

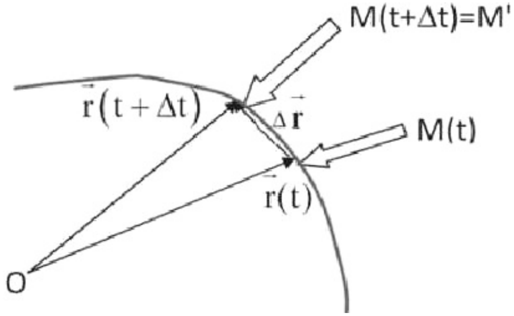
et, par définition de l'addition vectorielle (on additionne les vecteurs en les mettant bout à bout) :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Ce vecteur $\overrightarrow{OM}$ dépend du temps lorsque M se déplace. On l'appelle souvent "rayon vecteur" ou "vecteur position" de M et on le note $\vec{r}(t)$. Au cours de son mouvement, le point M décrit une courbe continue qui est sa **trajectoire**.

Au cours d'un petit intervalle de temps Δt, le vecteur position $\vec{r}$ subit une variation $\Delta\vec{r}$ :




Lors de son déplacement de M en M', la vitesse du point M est ordinairement définie par

$$\vec{v}_{moyenne} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Lorsqu'on fait tendre Δt vers 0, cette vitesse moyenne sur le déplacement MM' devient la vitesse instantanée, précisément à l'instant t pour la position bien définie M.

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$$

Donc, la vitesse instantanée est la dérivée du vecteur position.

Il est évident, par sa définition, que la vitesse est toujours tangente à la trajectoire (voir la figure précédente).

Cette définition vectorielle de la vitesse permet de faire des raisonnements et des calculs formels en économisant de "l'écriture" et du temps. Mais on peut toujours calculer effectivement les composantes du vecteur vitesse en dérivant les coordonnées du point M :

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt}\ \text{et}\ v_z = \frac{dz}{dt}$$

## 1.3 Mouvement à vitesse constante.

Un exemple de mouvement, le plus simple, est celui où la vitesse est égale à un vecteur constant $\overrightarrow{v_0}$. Donc :

$$\vec{v}(t) = \overrightarrow{v_0}$$

$$\text{ou}\ \frac{d\vec{r}}{dt} = \overrightarrow{v_0}$$

$\vec{r}(t)$ est donc une primitive de cette constante vectorielle $\overrightarrow{v_0}$. :

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{v_0}\,t + \overrightarrow{r_0}$$

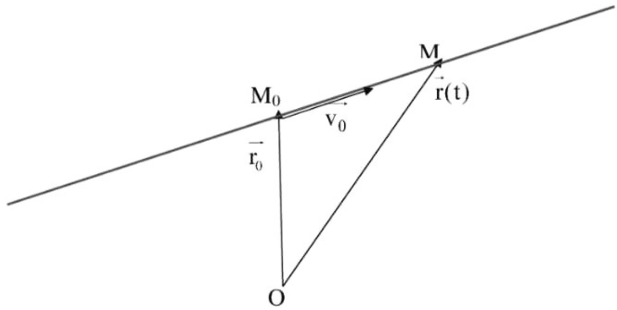
Le vecteur $\overrightarrow{r_0}$ repère la position $M_0$ du point M au temps 0 et l'on voit que le vecteur $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r}(t) - \overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{v_0}.t$ .Le point M décrit la droite parallèle à $\overrightarrow{v_0}$ passant par $M_0$ avec la vitesse constante $v_0 = \left|\overrightarrow{v_0}\right|$. En effet pour deux positions quelconques de M, $M_1$ et $M_2$ on a :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = (t_2 - t_1)\overrightarrow{v_0}$$

$$\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \overrightarrow{v_0}$$

sur toute sa trajectoire rectiligne, le point M conserve la même vitesse et on retrouve bien la définition banale de la vitesse : la vitesse est égale à la distance parcourue divisée par le temps de parcours.

Le mouvement à vitesse constante est rectiligne uniforme.




## 1.4 Cas où la vitesse varie : l'accélération.

Lorsque la vitesse n'est pas constante, sa dérivée vectorielle est **l'accélération du point mobile.** Nous noterons l'accélération $\vec{\gamma}(t)$ ou simplement $\vec{\gamma}$ (prononcez gamma) :

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$\vec{\gamma}(t)$ est la dérivée seconde de $\vec{r}(t)$, et donc on peut obtenir $\vec{r}(t)$ en intégrant deux fois de suite $\vec{\gamma}(t)$ (lorsque c'est possible…).

Remarquez que la notation différentielle de la dérivée seconde $\frac{d^2}{dt^2}$ est bien cohérente avec la définition de cette dérivée seconde.

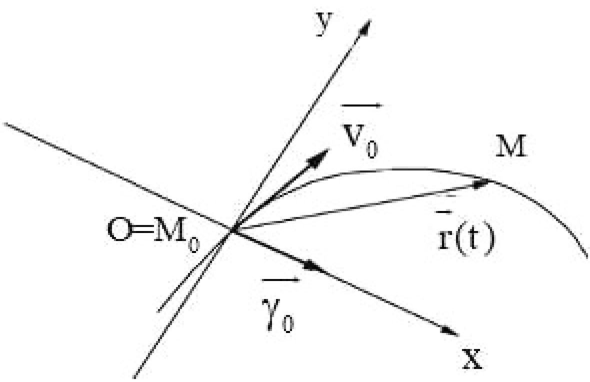
## 1.5 Mouvement uniformément accéléré.

Ce type de mouvement est très important : c'est celui d'un corps pesant dans un espace "réduit" où le champ de gravitation peut être considéré comme uniforme. Vous avez étudié ce mouvement au lycée ; nous allons seulement illustrer le fait que l'écriture vectorielle permet de simplifier l'étude du mouvement. Si l'accélération $\vec{\gamma}(t)$ est constante, on peut exprimer $\vec{v}(t)$ et $\vec{r}(t)$ comme on l'a vu précédemment (pages 10 et suivante) par deux intégrations successives :

$$\vec{\gamma}(t)=\overrightarrow{\gamma_0}$$
$$\vec{v}(t)=\overrightarrow{\gamma_0}.t+\overrightarrow{v_0}$$
$$\vec{r}(t)=\frac{1}{2}\overrightarrow{\gamma_0}.t^2+\overrightarrow{v_0}.t+\overrightarrow{r_0}$$

$\overrightarrow{r_0}$ et $\overrightarrow{v_0}$ sont respectivement la position et la vitesse de M au temps 0.

En choisissant astucieusement les axes de référence, on peut directement obtenir des informations sur ce type de mouvement. Prenons par exemple : l'origine des axes O au point $M_0$ (le vecteur $\overrightarrow{r_0}$ sera donc nul), l'axe Ox porté et orienté par le vecteur $\overrightarrow{\gamma_0}$ et le plan xOy défini par les deux vecteurs $\overrightarrow{\gamma_0}$ et $\overrightarrow{v_0}$ de façon à ce que la vitesse $\overrightarrow{v_0}$ soit orientée vers les y positifs :




On peut ainsi écrire facilement les trois composantes de chaque vecteur $\overrightarrow{r_0}$ , $\overrightarrow{v_0}$ et $\overrightarrow{\gamma_0}$ :

$$\vec{r}_o = \vec{0}$$

$$\vec{\gamma}_o = \begin{Bmatrix} \gamma_o \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_o = \begin{Bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A partir de :

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\gamma_0}t^2 + \overrightarrow{v_0}t + \vec{r_0}$$

on peut exprimer les projections de $\vec{r}(t)$ sur les trois axes qui permettent d'obtenir les expressions des coordonnées du point M :

$$x(t) = \frac{1}{2}\gamma_0 t^2 + v_{0x}t$$

$$y(t) = v_{0y}t$$

$$z(t) = 0$$

Le mouvement uniformément accéléré est plan : le point M reste dans le plan xOy puisque z(t) est toujours nul.

Dans le cas où $\overrightarrow{\gamma_0}$ et $\overrightarrow{v_0}$ sont colinéaires, le mouvement est rectiligne, uniformément accéléré (faites $v_{0y} = 0$ dans les équations ci-dessus…).

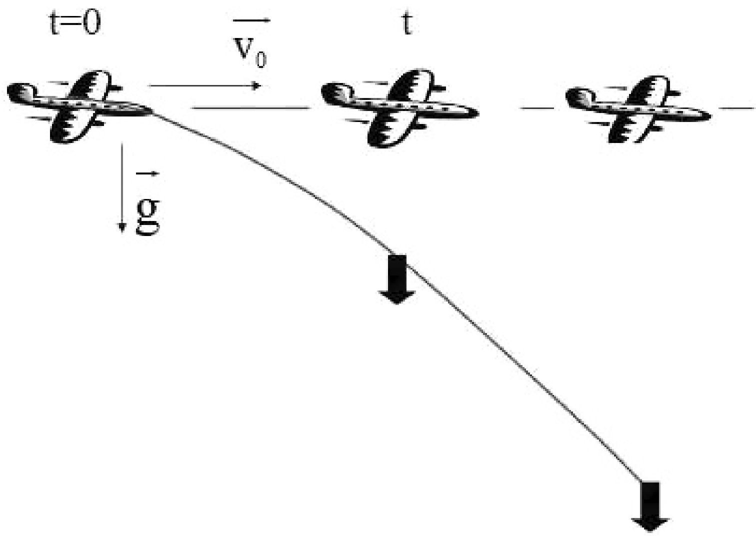
A l'examen des expressions de x(t) et y(t), on voit que le mouvement de M est accéléré dans la direction Ox, et uniforme dans la direction Oy : dans le mouvement uniformément accéléré, la composante de la vitesse perpendiculaire à l'accélération se conserve.

En terminale scientifique, vous auriez pu facilement montrer que la trajectoire du point M dans le plan xOy est une parabole. Ne vous privez pas de le faire si vous avez des souvenirs des maths de terminale.

Lorsque la vitesse initiale est perpendiculaire à l'accélération, la vitesse se conserve dans cette direction, alors que la composante de la vitesse dans la direction de l'accélération varie uniformément. Ceci est illustré par exemple lors de la chute d'une bombe larguée par un avion.

Si l'avion vole horizontalement à vitesse constante $\overrightarrow{v_0}$ , la bombe au moment t=0 de son largage possède cette vitesse initiale horizontale et la conserve (aux frottements de l'air près) au cours de sa chute uniformément accélérée (d'accélération $\overrightarrow{\gamma_0} = \vec{g}$ ) ; la bombe « suit » l'avion :

Largage de la bombe



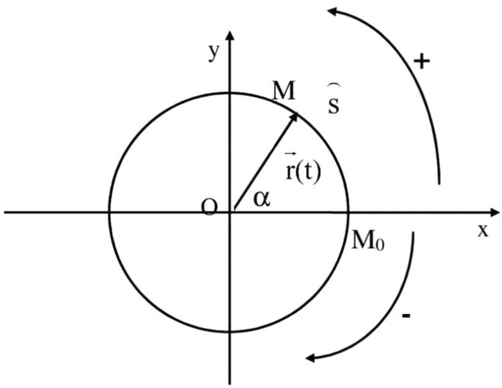

Vous avez pu vérifier ce fait dans des films de quarre : les bombes larguées par un avion le suivent au cours de leur chute, à la réserve près qu'elles sont ralenties, par rapport à l'avion, par le frottement de l'air.

## 1.6 Le mouvement circulaire.

Cette autre catégorie de mouvement joue un rôle fondamental en physique et peut être facilement étudiée grâce à la notation vectorielle. Lors d'un mouvement circulaire autour de l'origine des axes, le point M reste dans un plan (xOy) et le rayon vecteur $\vec{r}(t)$ est constant en **module mais pas en direction :**

$$\left|\vec{r}(t)\right| = r$$

Le point M peut être repéré par son rayon vecteur $\vec{r}(t)$, par ses cordonnées cartésiennes (x, y), par son abscisse angulaire $\alpha$(t) ou son abscisse curviligne $\overset{\frown}{s}$(t) par rapport à un point fixe $M_0$ de sa trajectoire. Dans la suite, les angles seront toujours exprimés en **radians**, unité d'angle généralement utilisée en physique.




Les différentes coordonnées de M (cartésiennes, angulaire ou curviligne) sont définies, en utilisant la convention de signe habituelle (convention du cercle trigonométrique) rappelée sur le schéma précédent. Cette convention va également définir le signe de la vitesse numérique v(t). , Ces grandeurs sont définies par :

$$\alpha = \widehat{M_0OM}$$

$$\overset{\frown}{s} = \widehat{M_0M}$$

$$x = r\cos\alpha$$

$$y = r\sin\alpha$$

r est constant :

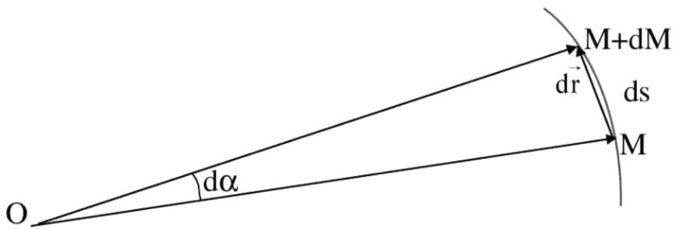
$$r = \left|\vec{r}(t)\right|$$

Le carré scalaire de $\vec{r}(t)$ est donc constant, et sa dérivée par rapport au temps est nulle :

$$\frac{d\left(\vec{r}\right)^2}{dt} = 2\vec{r}\frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{r}\,\vec{v} = 0$$

La vitesse est donc toujours perpendiculaire au rayon vecteur et tangente à la trajectoire. Vous voyez comment on peut obtenir simplement certains résultats en utilisant la notation vectorielle. Ceci dit, la vitesse étant toujours tangente à la trajectoire on devait bien s'attendre à ce que, pour une trajectoire circulaire, la vitesse soit perpendiculaire au rayon.

Si le point M subit un "très petit" déplacement sur le cercle, les abscisses angulaire, curviligne, et le rayon vecteur varient respectivement de : $d\alpha$, ds et $d\vec{r}$ .




L'angle $\alpha$ étant exprimé en radians, on a :

$$s = r\,\alpha$$

On voit sur le schéma précédent que pour un petit mouvement, le vecteur déplacement $d\vec{r}$ et l'arc $\overset{\frown}{MM'}$ tendent à se confondre ; lorsqu'on réduit l'angle au centre $d\alpha$ , la mesure de l'arc $d\overset{\frown}{s}$ et la longueur de la sécante $\left|d\vec{r}\right|$ sous tendus par cet angle tendent à s'égaler :

$$d\overset{\frown}{s} \approx \pm\left|d\vec{r}\right| \quad (+ \text{ pour un déplacement dans le sens positif},$$
$$- \text{ dans le cas contraire})$$

En divisant par dt et en faisant tendre dt vers 0, l'égalité devient exacte :

$$\frac{ds}{dt} = \pm\frac{\left|d\vec{r}\right|}{dt} = \pm\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \pm\left|\vec{v}\right|$$

On définit la vitesse algébrique du point tournant M comme étant positive pour un déplacement dans le sens trigonométrique sur la trajectoire, et négative pour le sens opposé, la valeur absolue de cette vitesse étant égale au module de la vitesse vectorielle. On a donc :

$$v = \pm\left|\vec{v}\right| = \frac{d\overset{\frown}{s}}{dt}$$

$$v = \frac{d(r\alpha)}{dt} = r\frac{d\alpha}{dt}$$

$\alpha$ étant mesuré en radians, on a : s=r $\alpha$ avec r constant.

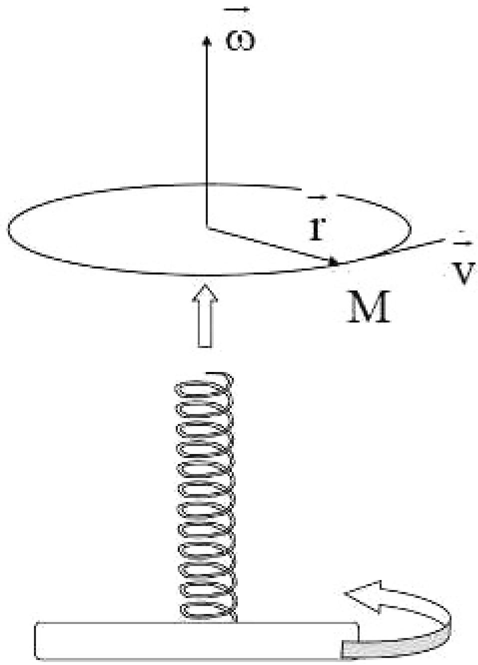
La dérivée de $\alpha(t)$ est la **vitesse angulaire** de M, que l'on désigne par $\omega$ (oméga) :

$$\omega = \text{vitesse angulaire} = \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\text{De} \quad v = r\frac{d\alpha}{dt} \text{ on tire:}$$

$$v = r\ \omega \text{ et } \ \omega = \frac{v}{r}$$

On introduit le **vecteur vitesse angulaire** $\vec{\omega}$**,** de module $\omega$, comme étant porté par l'axe de rotation de M, donc perpendiculaire au plan de la trajectoire, et orienté selon la règle "du tire-bouchon" : si on aligne l'hélice d'un tire-bouchon (ou d'une vis "à droite") sur l'axe de la trajectoire et qu'on le tourne dans le sens de rotation de M, son déplacement longitudinal donne la direction du vecteur $\vec{\omega}$ :



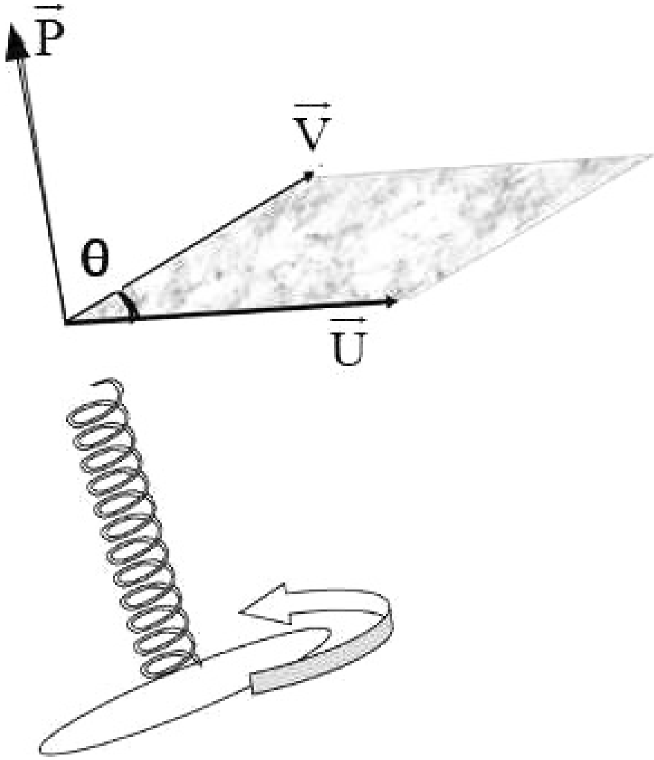

Avec cette définition du vecteur vitesse angulaire, la vitesse du point s'écrit simplement comme le produit vectoriel de $\vec{\omega}$ par $\vec{r}$ : $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

On a donc une écriture très simple de la vitesse.

Malheureusement vous ignorez sans doute ce qu'est le produit vectoriel, ce qui est dommage parce qu'il permet de simplifier beaucoup la description et l'étude des mouvements circulaires et aussi, par exemple, de représenter les forces magnétiques agissant sur une charge électrique en mouvement, de définir le moment cinétique, etc… On se demande pourquoi ce n'est pas enseigné au lycée. Cela demande un petit effort initial mais on y gagnera beaucoup dans la suite.

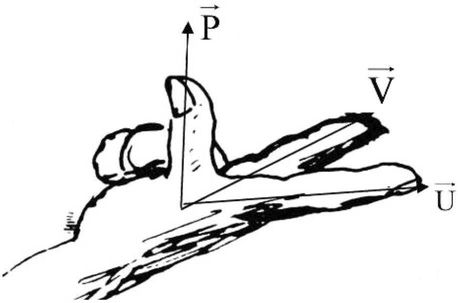
**Qu'est-ce que le produit vectoriel ?**

Le produit vectoriel $\vec{P}$ de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est un **vecteur** perpendiculaire au plan des deux facteurs du produit, dont le sens est donné par le déplacement longitudinal d'un tire-bouchon perpendiculaire au plan $\left(\vec{U},\vec{V}\right)$ tournant du premier vecteur vers le second,, et dont le module est égal au produit des modules des facteurs multiplié par le sinus de leur angle :




$$\left|\vec{P}\right| = \left|\vec{U}\right|\left|\vec{V}\right| \sin\theta$$

On peut aussi déterminer le sens du produit vectoriel par la règle des trois doigts de la main **droite (attention, pas la gauche).**




Si vous placez le pouce, l'index et le majeur de votre main droite comme indiqué sur le dessin, en alignant l'index avec le premier vecteur ($\vec{U}$) et le majeur avec le second ($\vec{V}$), la direction du produit $\vec{P}$ est donnée par le pouce.

Remarquez que le module du produit vectoriel est égal à l'aire du parallélogramme construit sur les deux termes du produit (surface en grisé dans le schéma de la page précédente) ; cela peut faire l'objet d'une petite démonstration géométrique élémentaire (à vous de jouer).

Les propriétés du produit vectoriel se déduisent intuitivement de sa définition (il peut être difficile de toutes les démontrer rigoureusement) :

$$\vec{P} = \vec{U} \wedge \vec{V} \Rightarrow \left|\vec{P}\right| = \left|\vec{U}\right|\left|\vec{V}\right| \sin\theta$$

$$\vec{V} \wedge \vec{U} = -\vec{U} \wedge \vec{V}$$

car le sens de rotation du tire bouchon s'inverse ou

il faut retourner votre main

$$\Downarrow$$

$$\vec{U} \wedge \vec{U} = \vec{0}$$

le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul

car leur angle est nul et donc le sinus également

$$\vec{U} \wedge (a\vec{A} + b\vec{B}) = a\vec{U} \wedge \vec{A} + b\vec{U} \wedge \vec{B}$$

On dit en mathématiques que le produit vectoriel est dustributif par rapport à l'addition vectorielle.

Si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont des fonctions vectorielles :

$$\frac{d(\vec{U} \wedge \vec{V})}{dt} = \frac{d\vec{U}}{dt} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Le produit vectoriel se dérive comme tous les produits en dérivant successivement chaque terme du produit mais attention, il ne faut pas inverser l'ordre des vecteurs.

**Revenons maintenant à notre mouvement circulaire.**

Le vecteur $\vec{\omega}$ est donc défini pour que

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Les vecteurs $\vec{\omega}$, $\vec{r}$ et $\vec{v}$ forment un trièdre orthogonal direct et vous pouvez vérifier que :

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \wedge \vec{v}}{r^2}$$

Cette écriture de $\vec{v}$ permet de calculer formellement l'accélération $\vec{\gamma}$ qui ne peur être nulle, même si le module de la vitesse est constant, puisque le mouvement n'est pas rectiligne uniforme.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{\gamma}(t) = \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}}_{\downarrow \; \vec{\gamma}_t(t)} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{v}}_{\downarrow \; \vec{\gamma}_c(t)}$$

$$\vec{\gamma}_t(t) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}$$

$$\vec{\gamma}_c(t) = \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

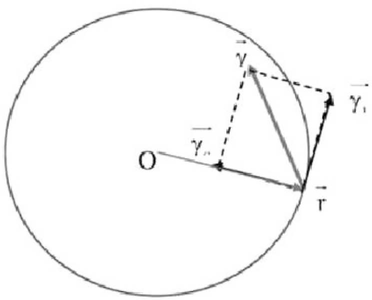
L'accélération apparaît comme la somme de deux vecteurs perpendiculaires : $\vec{\gamma_t}$ et $\vec{\gamma_c}$ .

La composante $\vec{\gamma_t}$ de l'accélération est perpendiculaire au vecteur $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ et au vecteur $\vec{r}$ . Puisque le vecteur $\vec{\omega}$ se modifie en restant parallèle à lui-même (l'axe de rotation de M reste fixe, comme sa trajectoire circulaire), $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ et $\vec{\omega}$ sont colinéaires, $\vec{\gamma_t}$ est perpendiculaire à $\vec{r}$ et $\vec{\omega}$. Il est donc tangent au cercle. Il s'agit de l'accélération tangentielle, qui est égale en valeur numérique à :

$\gamma_t = r\frac{d\omega}{dt}$ (avec les signes obéissant à la convention habituelle) et qui n'est donc non nulle que si la vitesse angulaire varie ( $\frac{d\omega}{dt} \neq 0$ ).

L'accélération tangentielle rend compte des variations de la vitesse de rotation de M.

L'autre composante  de l'accélération, $\vec{\gamma_c}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$ et $\vec{\omega}$, et pointe vers le centre du cercle (observez le schéma ci-dessous) ;



$$\vec{\gamma}_c(t) = \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

et comme $v = \omega r$ et $\vec{\omega} \perp \vec{v}$:

$$\gamma_c = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

Cette accélération dite "centripète" (pointant vers le centre de rotation) n'est jamais nulle ; c'est elle qui est "responsable" de la courbure de la trajectoire de M.

## 1.7 Le mouvement circulaire uniforme.

Si le mouvement est circulaire uniforme, la vitesse angulaire est constante et selon les relations établies à la page précédente :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega = \text{constante} \Rightarrow \alpha = \omega t + \varphi_0$$

où $\varphi_0$ est la constante d'intégration

$$\gamma_t = 0$$

et $\gamma_c = \omega^2 r = \text{cons tan te}$

En projection sur les axes Ox et Oy:

$$OM_1 = r\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$OM_2 = r\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$\omega$, la vitesse angulaire est appelée pulsation du mouvement

$\omega t + \varphi_0$ est appelée la phase au temps $t = \varphi(t)$

et $\varphi_0$ la phase à l'origine (du temps)

Le mouvement circulaire uniforme est un prototype de mouvement **périodique,** qui se répète identiquement à des intervalles de temps égaux. Les projections de M sur les axes sont animées de mouvements sinusoïdaux harmoniques, décrits par les fonctions sinus et cosinus de la phase. Pour de tels mouvements, on définit la période T qui est la durée d'un tour de M, ou l'intervalle de temps minimum au bout duquel le mouvement se répète.

L'angle $\alpha$ augmente de $2\pi$ radians à chaque tour complet de M dont la durée est d'une période. Donc :a :

$$\omega T = 2\pi$$

A chaque période, la coordonnée angulaire $\alpha$ augmente de $2\pi$.

On définit la fréquence $\nu$ (nu) comme le nombre de tours par unité de temps soit le nombre de périodes par seconde :

$$\nu = \frac{1}{T} \Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\omega = 2\pi\,\nu$$

En fonction de la fréquence, le mouvement de la projection $M_1$ du point M sur l'axe Ox s'écrit :

$$OM_1 = r\cos(2\pi\nu t + \varphi_0)$$

ou bien en fonction de la période :

$$OM_1 = r\cos\left(2\pi\frac{t}{T} + \varphi_0\right)$$

Le mouvement circulaire uniforme est le premier exemple que nous rencontrons de mouvement périodique harmonique (à fréquence unique et décrit par des fonctions sinusoïdales). Ce type de mouvement sera essentiel dans l'étude des phénomènes ondulatoires et dans quantité de systèmes physiques.

**Remarque** pour les amateurs de mathématiques : on peut assimiler le plan xOy de la trajectoire de M au plan complexe. Dans ce cas, le point M représente un nombre complexe Z de partie réelle x et imaginaire y :

$$Z = x + iy = r\left(\cos(2\pi\nu t + \varphi_0) + i\sin(2\pi\nu t + \varphi_0)\right)$$

ou, en utilisant la notation exponentielle complexe :

$$Z = r\,e^{i(2\pi\nu t+\varphi_0)} = r\,e^{i\varphi_0}e^{i2\pi\nu t} = r\,e^{i\varphi_0}e^{i\omega t}$$

On peut ainsi dissocier la phase à l'origine $\varphi_0$ de la fonction exponentielle complexe (en fait sinusoïdale) du temps. La fonction exponentielle est très intéressante car elle se dérive et s'intègre facilement. De la représentation complexe du vecteur position, on déduit facilement les représentations des vecteurs vitesse et accélération :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \leftrightarrow Z = x + iy$$

$$\overrightarrow{OM} = r(\cos(\omega t + \varphi_0)\vec{i} + \sin(\omega t + \varphi_0)\vec{j})$$

$$\updownarrow$$

$$Z = r(\cos(\omega t + \varphi_0) + i\sin(\omega t + \varphi_0))$$

$$Z = re^{i(\omega t+\varphi_0)} = re^{i\varphi_0}e^{i\omega t}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \quad \leftrightarrow \quad V = \frac{dZ}{dt} = i\omega r\,e^{i\varphi_0}e^{i\omega t}$$

$$V = i\omega Z$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \gamma_x\vec{i} + \gamma_y\vec{j} \quad \leftrightarrow \quad \Gamma = \frac{dV}{dt} = -\omega^2 r\,e^{i\varphi_0}e^{i\omega t}$$

$$\Gamma = -\omega^2 Z$$

On obtient les expressions complexes de la vitesse et de l'accélération en multipliant "la position complexe" de M par $i\omega$ et par $-\omega^2$ respectivement.

De même, un mouvement sinusoïdal rectiligne pouvant être considéré comme la projection sur un axe d'un mouvement circulaire uniforme, on pourra toujours le traiter comme la partie réelle d'une telle rotation "complexe" Z. La vitesse sera la partie réelle de $i\omega Z$ et l'accélération celle de $-\omega^2 Z$.

Cette notation complexe peut être utilisée dans l'étude de tous les phénomènes périodiques.

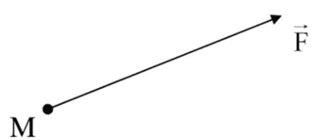
# 2 DYNAMIQUE DU POINT : FORCE, IMPULSION, ENERGIE.

Nous venons de voir comment on peut rendre compte du mouvement d'in point "géométrique", sans nous occuper de sa nature physique, ni de l'environnement matériel qui peut agir sur
son mouvement, le provoquer, le modifier. Il s'agissait de la seule **cinématique** du mouvement. Nous allons aborder maintenant le mouvement d'un point "matériel", physique, subissant les actions du monde extérieur. Ce ne pourra plus être un point géométrique, de dimension nulle. Ce pourra être une particule massive, ou une balle de tennis ou de ping-pong. Mais nous considérerons dans la suite des objets quasi ponctuels, doués d'une masse et subissant des actions représentées par les forces qui s'exercent sur eux. C'est la **dynamique du point**. Nous pourrions montrer aussi que cette dynamique du point permet de prévoir et décrire le mouvement du centre de masse d'un objet étendu ou même du barycentre d'un ensemble d'objets : le centre de gravité d'un ou de plusieurs objets matériels peut être traité comme un point isolé autour duquel le ou les objets dont il est le centre tourneraient ou se déformeraient.

## 2.1 Loi fondamentale de la dynamique.

Un point matériel, et plus seulement géométrique, M est affecté d'une **masse inerte m** , masse ponctuelle de M. Cette masse représente la "quantité de matière" contenue dans M et sa "résistance" aux forces qui s'appliquent à lui : plus la masse est importante, plus la force à appliquer pour modifier le mouvement du mobile devra être grande.

La force est la représentation synthétique de l'action que subit un mobile de la part du "monde extérieur". Cette action se caractérise par une direction, une orientation, et une intensité : **une force peut donc être représentée par un vecteur** :



La notion de force nécessiterait des développements et analyses plus approfondis, mais je suppose que vous savez, plus ou moins intuitivement, de quoi il s'agit. Remarquez seulement qu'une force peut être statique (quand vous appuyez sur votre table par exemple), mais c'est alors qu'elle est équilibrée par une force de réaction (la réaction de votre table).

Une autre propriété importante des forces est leur additivité : lorsque deux forces différentes indépendantes s'appliquent à un point matériel, leur action commune est équivalente à celle d'une force unique égale à la somme vectorielle des deux forces (règle autrefois enseignée sous le nom de " règle du parallélogramme "). Cela permet de considérer qu'un point mobile n'est toujours soumis qu'à une seule force, quitte à additionner préalablement les forces qu'il subit.

On définit également **l'impulsion ou quantité de mouvement** du mobile M de masse inerte m et de vitesse $\vec{v}$ par :

$$\overrightarrow{p} = m\,\vec{v}$$

Lorsque la somme vectorielle des forces appliquées à ce mobile est égale à $\vec{F}$, sa quantité de mouvement est modifiée selon la **loi fondamentale de la dynamique :**

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Si m est constante on peut la sortir de la dérivée :

$$\vec{F} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{\gamma}$$

Ceci constitue la deuxième loi de Newton, et curieusement, la première loi en est en fait une conséquence : si le mobile est isolé, il ne subit pas de force ($\vec{F} = \vec{0}$), sa vitesse est constante, $\left(\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}\right)$ et son mouvement est rectiligne uniforme (principe d'inertie).

**Un mobile isolé conserve son état de mouvement**, ce qui est la première loi de Newton, mais qui avait été énoncée auparavant par Galilée …

On peut considérer la seconde loi de Newton commeune forme de définition de "la force". Le but de la dynamique du point serait alors de déterminer le mouvement d'un point matériel (d'une particule ou du centre de mzsse d'un système) connaissant sa position et sa vitesse à un instant donné et l'expression de la force totale qui s'exerce sur lui en chaque point et à tout instant. En amont, le problème serait de proposer des expressions adéquates pour représenter mathématiquement les forces agissant sur les points matériels selon les circonstances : c'est le problème de la détermination des "lois de force".

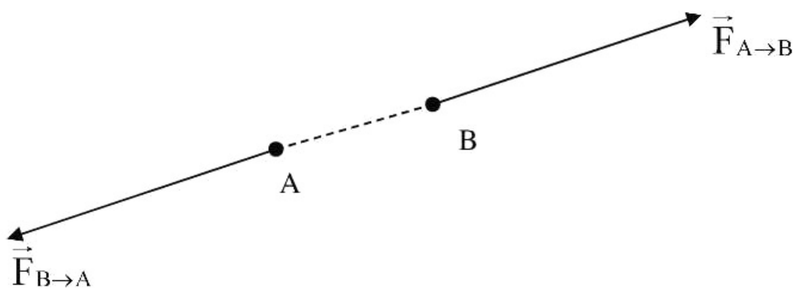
Exemple trivial : un corps pesant, de masse inerte m, est lancé dans votre chambre. Il n'est soumis qu'à son poids $\vec{P}$ . Il va donc être soumis à une accélération $\vec{\gamma}$ telle que :

$$\vec{P} = m\vec{\gamma} = m\vec{g}$$

Il sera animé d'un mouvement uniformément accéléré (cf. chapitre 1.5 page 14).

## 2.2 Troisième loi de Newton. Principe d'égalité de l'action et de la réaction.

Lorsque deux points matériels A et B sont en interaction mutuelle, la force exercée par A sur B (action), est égale et opposée à la force exercée par B sur A (réaction) :



$$\vec{F}_{A\to B} + \vec{F}_{B\to A} = \vec{0}$$

Si les deux points sont isolés, la seule force que subit l'un est la force due à l'autre, donc :

$$\vec{F}_{B\to A} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{F}_{A\to B} = \frac{d\vec{p}_B}{dt}$$

$$\vec{F}_{B\to A} + \vec{F}_{A\to B} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \text{ Constante}$$

L'impulsion totale est constante.

Plus généralement, l'impulsion totale d'un système **isolé** (ne subissant pas de force extérieure) de particules (ou d'objets) est constante : le principe d'inertie s'applique à tout système physique isolé, ne subissant pas d’action extérieure.

Conséquence : le centre de gravité de deux (ou plusieurs) particules en interaction mutuelle ne subissant pas d'actions externes possède une vitesse constante. Ceci impose le mouvement rectiligne uniforme d'un système de particules isolé.

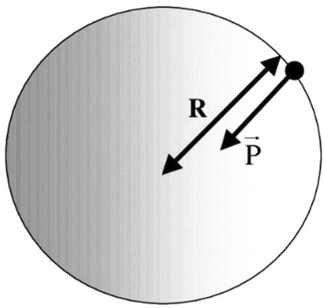
Pour les physiciens sourcilleux, il faut apporter une précision sur la notion de masse.

La masse dont nous avons parlé est la masse inerte, celle qui intervient dans la définition de la quantité de mouvement et dans la deuxième loi de Newton. Mais il existe une autre masse, a priori différente, qui intervient dans une autre loi de Newton : la masse pesante. Celle-ci figure dans l'expression des forces de gravitation.

Selon la loi de la gravitation de Newton, deux objets A et B distants de R exercent l'un sur l'autre une force attractive d'expression :

$$\vec{F} = G\frac{\mu_A \mu_B}{R^2}\vec{u}$$

où G est la constante (universelle) de la gravitation, $\vec{u}$ un vecteur unitaire dirigé du corps qui subit la force $\vec{F}$ vers l'autre,
$\mu_A$ et $\mu_B$ deux paramètres caractérisant les deux corps A et B, leurs **masses pesantes**. Cette force est parfaitement négligeable lorsqu'on considère deux objets courants ou deux particules élémentaires. Par contre si l'un des objets est extrêmement massif (une étoile ou une planète …), la force de gravitation devient appréciable ; pour un objet situé à la surface de la Terre, la force de gravitation exercée sur lui par la Terre est justement son poids :




La force gravitationnelle exercée par la Terre sur un objet A de masse pesante $\mu_A$, situé à sa surface (donc à la distance R, rayon terrestre, de son centre) est donc :

$$\vec{P}_A = G\frac{\mu_A \mu_T}{R^2}\vec{u} = \mu_A G\frac{\mu_T}{R^2}\vec{u} = \mu_A \vec{g}$$

où $\vec{g}$ est un vecteur ayant la dimension d'une accélération, l'accélération de la pesanteur en un point de la surface du globe. Sous l'effet de son poids, le mobile A, s'il est libre de toute liaison, va donc acquérir une accélération $\vec{\gamma}$ telle que :

$$\vec{P} = \mu_A \vec{g} = m_A \vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{\mu_A}{m_A} \vec{g}$$

l'accélération acquise par le corps A n'a a priori pas de raison d'être égale à l'accélération de la pesanteur, et les objets tombant à la surface de la Terre devraient avoir une accélération dépendant du rapport de leur masse pesante à leur masse inerte. Sauf que ce rapport est toujours rigoureusement égal à 1. Masse pesante et masse inerte sont égales, si bien que tous les corps à la surface de la Terre chutent toujours avec la même accélération $\vec{g}$ quelle que soit leur masse (inutile de préciser inerte ou pesante). Ceci avait été vérifié dès le XVI$^{\text{ème}}$ siècle par Galilée lors des expériences réalisées à la tour de Pise.

Il est étonnant que ces deux paramètres $\mu$ et m, intervenant dans deux lois différentes (même si ce sont deux "lois de Newton"), soient rigoureusement égaux … C'est Einstein qui a montré, dans sa théorie de la relativité générale, qu'il s'agissait d'une seule et même grandeur : la masse … Il est hors de question d'aborder ici la relativité générale. Admettez-le sans plus de discussion, mais reconnaissez qu'il y avait ici un point délicat et que la confusion habituelle entre masse inerte et pesante est une erreur qui n'a pas de conséquence parce qu'on peut effectivement les confondre.

## 2.3 Le moment cinétique. Théorème du moment cinétique.

La quantité de mouvement est une grandeur adaptée surtout à l'étude des mouvements de translation ; pour les mouvements de rotation, la grandeur adaptée est le **moment cinétique** défini par rapport à un point fixe O par :

$$\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

Le moment cinétique est défini pour un point matériel M par rapport au point fixe O, origine du vecteur $\vec{r}$ et implicitement centre de rotation lorsque le mouvement est une rotation (pas nécessairement circulaire). Le moment cinétique peut être utilisé pas seulement dans les mouvements circulaires, mais dans tous les types de mouvements où un point fixe joue un rôle particulier : centre du cercle pour une trajectoire circulaire, un des foyers pour une trajectoire elliptique ou hyperbolique, foyer pour une trajectoire parabolique.

Pour un mouvement circulaire (cf. page 24), nous avons vu que :

$$\vec{\omega}=\frac{\vec{r}\wedge\vec{v}}{r^2} \Leftrightarrow r^2\vec{\omega}=\vec{r}\wedge\vec{v}$$

d'où

$$\vec{L}=mr^2\vec{\omega}=I\vec{\omega}$$

$I = mr^2$ est appelé le moment d'inertie du mobile M par rapport au point fixe O.

Dérivons maintenant le moment cinétique par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dt}\wedge\vec{p}+\vec{r}\wedge\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{v}\wedge m\vec{v}+\vec{r}\wedge\vec{F}$$

or : $\vec{v}\wedge m\vec{v}=\vec{0}$ (le produit vectoriel d'un vecteur par lui même est nul) donc :

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\wedge\vec{F} = \text{moment de la force appliquée à M par rapport à O.}$$

Cette relation constitue le théorème du moment cinétique.

Remarquez que si la force appliquée est nulle, ou si seulement elle passe toujours par le point fixe O (force centrale) :

$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\wedge\vec{F}$ est nulle puisque les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{F}$ sont colinéaires et donc le moment cinétique est constant, sa dérivée étant nulle.