

Pierre-Marie Portejoie

Comment les nombres ont été apprivoisés

Mieux les comprendre
pour mieux les apprendre

Remerciements

Je souhaite rendre ici hommage aux personnes qui m'ont accompagné pour la réalisation de ce projet, et tout particulièrement à :

Sylvie Barrat : cette grande aventure d'exploration du domaine des nombres est née des nombreux échanges que nous avons eus sur le sujet. Elle a été grandement nourrie de ses réflexions précieuses sur la réalité quotidienne de l'enseignement des nombres aux tout jeunes enfants.

Jean-Pierre Ferrier, qui par ses relectures, ses réflexions, ses encouragements et ses suggestions, m'a soutenu tout au long de mon travail, et aidé à progresser dans ma réflexion.

Sophie Coulomb-Picquier : par son accompagnement attentif et pertinent dans l'expérimentation de la méthode d'enseignement associée, elle m'a permis de progresser dans ma vision pédagogique et dans sa mise en œuvre concrète,

Dominique Trebuchet, Éric Descatoires, Hervé Bernad et Pierre Vassort, pour avoir bien voulu assurer la relecture du manuscrit et suggérer les derniers aménagements.

Qu'ils en soient tous chaleureusement remerciés.

Ce livre a été publié sur www.bookelis.com

ISBN : 979-10-424-0892-3

© Pierre-Marie Portejoie

CNEACA V16

Tous droits de reproduction, d'adaptation et de traduction, intégrale ou partielle réservés pour tous pays.

L'auteur est seul propriétaire des droits et responsable du contenu de ce livre.

PRÉSENTATION DE L'OUVRAGE

Ce livre est l'aboutissement d'une recherche conduite dans le but de mieux comprendre les nombres - ceux que l'on apprend à l'école - et ainsi faciliter leur apprentissage et leur enseignement.

Les premières clarifications ont porté sur la distinction entre nombres et numéros, puis entre les nombres et leurs désignations¹. Elles avaient déjà été exposées dans un précédent livre². Elles sont reprises dans le présent ouvrage.

Toutefois en approfondissant la notion de "nombres", il est apparu que ceux-ci ne sont pas tout à fait ce que l'on croit habituellement. Ce sont des entités plus "sauvages" qu'il n'y paraît, si bien que leur domestication a nécessité une innovation assez particulière. C'est l'aventure étonnante qui est présentée dans ce livre. On y rencontrera d'abord des notions classiques, comme celle de quantité, mais abordées sous un angle un peu inhabituel. Au passage on fera appel à certains concepts plus généraux, comme celui d'identification³ des objets, en relation avec leurs désignations. Il s'agit là de notions rarement approfondies, alors qu'elles sont essentielles en matière de connaissance et d'apprentissage.

Puis apparaîtront d'autres notions, franchement nouvelles, nécessitées par cette approche renouvelée des nombres. Enfin seront abordées certaines questions spécifiques, comme le calcul, sur lesquelles règnent encore quelques malentendus : Qu'est-ce exactement que le calcul ? Dans quels cas cette pratique - distincte des opérations - devient-elle nécessaire ... et d'abord possible ?

¹ Une désignation est un signe matériel (un nom, prononcé ou écrit, mais aussi une image, un dessin, etc.) utilisé pour faire référence à un objet, notamment lorsque celui-ci est absent. Voir la rubrique "désignation" dans le glossaire.

² Titre : "Fâché avec les nombres". Il existe également une vidéo sur YouTube (même titre, durée 15mn), qui permet de bien visualiser ces distinctions.

³ On trouvera l'explication de cette notion dans le corps du livre au chapitre correspondant, ou bien dans le glossaire en fin d'ouvrage.

Je me suis efforcé de rendre ce livre facile à lire pour toute personne intéressée par ce sujet. Pour cela la présentation des diverses notions est progressive, et elles sont toujours visualisées avant d'être désignées, de façon que le lecteur puisse d'abord les percevoir clairement avant d'en entendre parler avec des mots.

On rencontrera néanmoins quelques analyses assez approfondies. Elles étaient nécessaires, pour justifier ou expliciter certains aspects de cette nouvelle approche. C'est au lecteur qu'il appartiendra d'apprécier, au cas par cas, l'opportunité pour lui de les suivre dans le détail.

La principale difficulté me semble résider dans la nouveauté du point de vue, alors que ce sujet, celui des nombres qu'on apprend à l'école, pouvait paraître ne plus receler de mystère. Pour cette raison je propose au lecteur de faire provisoirement abstraction de ce qu'il a pu apprendre sur le sujet, et d'aborder cette lecture avec un regard neuf, comme s'il s'agissait d'un domaine nouveau pour lui. Bien entendu, au bout du compte il finira par retrouver ce qu'il savait sur les nombres. Mais peut être en aura-t-il une compréhension nouvelle. En tout cas, avec cette absence d'a priori, le voyage devrait lui paraître plus intéressant.

Enfin je précise que ce livre ne constitue pas par lui-même une méthode d'apprentissage des nombres et du calcul. C'est la présentation générale d'une nouvelle approche de ce domaine. Bien entendu elle a vocation à déboucher sur une démarche d'apprentissage adéquate. Celle-ci existe. Elle a été développée, accompagnée du matériel pédagogique approprié.

On trouvera au tout début du livre un plan général de l'ouvrage, et à la fin plusieurs annexes qui peuvent être utiles, dont notamment :

- un glossaire énonçant les définitions de termes techniques ou inhabituels utilisés,
- un index permettant, pour un certain nombre de mots clés, d'en retrouver les occurrences dans le corps du texte,
- enfin un plan détaillé de l'ensemble de l'ouvrage.

PLAN GÉNÉRAL

PREMIÈRE PARTIE

LES QUANTITÉS, LES NOMBRES ET LES OPÉRATIONS

Chapitre 1-1

LES QUANTITÉS ET LES NOMBRES 17

THÈMES :

- ✓ Un univers de quantités
- ✓ Les deux sortes de quantités : compactes et granulaires
- ✓ Les nombres : des quantités granulaires
- ✓ Le fondement de la notion de nombre : l'unité
- ✓ Identifier / reconnaître les quantités
- ✓ Les nombres et les "formes-nombres"

Chapitre 1-2

NOMBRES COMMUNS ET NOMBRES CANONIQUES 51

THÈMES :

- ✓ Les nombres "communs" de notre environnement sont insaisissables (non identifiables)
- ✓ Les systèmes de numération : des fabriques de formes-nombres artificielles identifiables
- ✓ Nombres "communs" et nombres "canoniques"

Chapitre 1-3

LES NOMBRES DÉCIMAUX :

DES FORMES-NOMBRES ARTIFICIELLES

CRÉÉS PAR LE SYSTÈME DE NUMÉRATION DÉCIMAL 71

THÈMES :

- ✓ Les nombres décimaux : des formes-nombres canoniques
- ✓ Le système de numération décimal et son chaînon manquant
- ✓ Visualiser les nombres décimaux : le dispositif des dominos
- ✓ La structure des nombres décimaux (des formes-nombres décimales) : le canevas décimal réduit
- ✓ L'utilité des nombres décimaux

Chapitre 1-4

APRÈS LES FORMES DES NOMBRES DÉCIMAUX, LEURS DÉSIGNATIONS : DES NOMS ET DES CHIFFRES 131

THÈMES :

- ✓ D'où viennent les dénominations utilisées pour désigner les nombres décimaux
- ✓ La notation chiffrée des nombres décimaux

Chapitre 1-5

LA COMPARAISON DES NOMBRES DÉCIMAUX 165

THÈMES :

- ✓ Comparaison par leurs formes canoniques
- ✓ Comparaison par leurs notations chiffrées
- ✓ La série des noms de nombres : nombres et numéros
- ✓ L'ordre de grandeur des nombres

Chapitre 1-6

LES OPÉRATIONS ET LES PROBLÈMES SUR LES QUANTITÉS 215

THÈMES :

- ✓ Manipulations sur les objets et opérations sur les quantités
- ✓ Quatre types d'opérations de base sur les quantités
- ✓ Qu'est-ce qu'un "problème" de quantités
- ✓ Le traitement direct des problèmes de quantités
- ✓ Le recours aux nombres décimaux

Chapitre 1-7

TRAITER LES PROBLÈMES DE QUANTITÉS AU MOYEN DES NOMBRES DÉCIMAUX 233

THÈMES :

- ✓ Travailler sur les quantités - L'apport des nombres décimaux
- ✓ Les techniques de recherche des nombres décimaux équivalents :
 - Pour les nombres communs : Le comptage
 - Pour les quantités compactes : La mesure
- ✓ Diagramme de la procédure de traitement des problèmes de quantités au moyen des nombres décimaux

DEUXIÈME PARTIE

LES CALCULS

Chapitre 2-1

POURQUOI DES CALCULS – QU'EST-CE QUE CALCULER 255

THÈMES :

- ✓ L'apport des nombres décimaux
- ✓ La nécessité du calcul pour les nombres décimaux
- ✓ Qu'est-ce que calculer - Sur quoi porte le calcul
- ✓ Bien distinguer les opérations et les calculs

Chapitre 2-2

L'ADDITION DES NOMBRES ÉLÉMENTAIRES DÉCIMAUX

CALCUL DU NOMBRE DÉCIMAL RÉSULTAT 275

THÈMES :

- ✓ Les nombres complémentaires
- ✓ Calculer le résultat de l'addition de deux nombres élémentaires
- ✓ Pourquoi "Deux plus deux égale quatre"
- ✓ Les tables d'addition

Chapitre 2-3 - L'ADDITION DES GRANDS NOMBRES DÉCIMAUX

CALCUL DU NOMBRE DÉCIMAL RÉSULTAT 301

THÈMES :

- ✓ L'addition des grands nombres décimaux sous leurs formes canoniques
- ✓ L'addition des grands nombres décimaux sous leurs notations chiffrées canoniques
- ✓ Les additions multiples

Chapitre 2-4 - LA MULTIPLICATION

DES NOMBRES ÉLÉMENTAIRES DÉCIMAUX

CALCUL DU NOMBRE DÉCIMAL RÉSULTAT 329

THÈMES :

- ✓ Qu'est-ce qu'une multiplication : une addition multiple de la même quantité
- ✓ La nécessité de trouver par expérimentation les résultats des multiplications des nombres élémentaires
- ✓ Les tables de multiplication

Chapitre 2-5

LA MULTIPLICATION DES GRANDS NOMBRES DÉCIMAUX CALCUL DU NOMBRE DÉCIMAL RÉSULTAT 339

THÈMES :

- ✓ Observations préalables sur les nombres décimaux
- ✓ Calculs préparatoires sur les formes canoniques et sur les notations chiffrées
- ✓ Procédure générale de multiplication des grands nombres décimaux

CONCLUSION

LES NOMBRES ET LEUR APPRENTISSAGE 373

THÈMES :

- ✓ Quantités, nombres, opérations et calculs
- ✓ Le nécessaire apprentissage des nombres décimaux

ANNEXES

LA VÉRITABLE NATURE DES NOMBRES 381

LES AXIOMES DES NOMBRES 387

UN PEU PLUS SUR LES FORMES, LES DÉSIGNATIONS ET LES CALCULS 397

GLOSSAIRE 405

INDEX 429

PLAN DÉTAILLÉ 433

Première partie

LES QUANTITÉS, LES NOMBRES
ET LES OPÉRATIONS

CHAPITRE 1-1

LES QUANTITÉS ET LES NOMBRES

1-1-1 – UN UNIVERS DE QUANTITÉS

Qu'est-ce qu'une quantité ? Qu'est-ce qu'un nombre ?

Une quantité est un aspect que l'on peut percevoir sur les objets. Par exemple sur une table on peut voir sa longueur, sa largeur ou sa surface – ce sont des quantités, au même titre que le volume d'une bouteille, ou le poids d'un colis :



Ce qui caractérise les quantités, c'est qu'on peut les comparer sous l'angle plus ou moins avec d'autres quantités semblables observées sur d'autres objets (ou sur les mêmes). Par exemple « Cette table est beaucoup plus longue que large », autrement dit "sa longueur (quantité) est plus grande que sa largeur (quantité)". Autre exemple : « Le salon (surface) est beaucoup grand que la chambre (surface) ».

Cette notion de quantité est très importante, car c'est un des critères les plus fréquents sur lesquels nous fondons nos décisions dans la vie. De quelle façon ? Par des comparaisons entre ces quantités – "plus grand" ou "plus petit", ou encore "égale", qui est sans doute le résultat de comparaison le plus fréquemment recherché.

La notion de comparaison est ainsi au fondement de la quantité et de sa perception.

Dans ce contexte qu'en est-il des nombres ? Et d'abord qu'est-ce qu'un nombre ? C'est aussi une "quantité", mais qu'on perçoit

sur un groupe d'objets. Lorsqu'on regarde un groupe de pommes tout le monde perçoit qu'il y a là un nombre : un nombre de pommes. C'est une quantité de pommes :



Ainsi sur un groupe on peut percevoir une quantité d'un certain type, qu'on appelle un nombre. C'est un aspect de ce groupe d'objets, une de ses propriétés, au même titre que sa couleur ou l'étendue qu'il occupe.

Comme toutes les quantités, les nombres eux aussi servent à faire des comparaisons : « Il y a plus de pommes dans ton panier que dans le mien ». Toutefois ces quantités "nombres" sont d'une nature très différente de celles qu'on associe à des objets uniques, comme les longueurs ou les poids.

Ainsi, on trouve dans la nature deux grande catégories de quantités. Nous allons y revenir dans un instant.

Notons tout de suite qu'à la comparaison, comme notion directement liée aux quantités, il faut en ajouter une seconde, elle aussi très importante : l'addition. Par exemple lorsqu'on met deux tables bout à bout, leurs longueurs ou leurs surfaces s'additionnent, de même que lorsqu'on regroupe deux paquets de bonbons : leurs nombres d'additionnent.

Il existe des quantités qui peuvent se comparer, mais pas s'additionner, comme les intensités des parfums. Dans toute la suite nous ne nous intéresserons qu'aux quantités qui peuvent à la fois se comparer et s'additionner.

Deux types fondamentaux de quantités : les quantités compactes et les quantités granulaires

Dans la nature on rencontre donc deux types de quantités :

- Un premier type : celles qui apparaissent d'un seul tenant, sur des objets uniques, comme la longueur d'une table ou le poids d'une chaise. Nous les appellerons les quantités compactes.

Leur grandeur tient à l'étendue qu'elles occupent ou à l'intensité que l'on perçoit. Exemples :



Longueurs (compactes)



Surface (compacte)

Ces quantités sont dites compactes parce qu'en leur sein on ne distingue aucunes parties ou morceaux séparés. C'est pourquoi nous les qualifions également de continues, parce qu'on ne perçoit en leur sein aucune rupture, aucune fragmentation.

Il y a de nombreux types de quantités compactes : longueur, surface, poids, etc. Chacune d'elle est perçue d'une façon qui lui est propre : sur un objet matériel (comme un ballon), la perception de sa surface est très différente de celle de son volume, ou encore de son poids.

- Puis il y a le second type de quantité, qui apparaît sur des groupes constitués de plusieurs éléments séparés, et que nous appelons les nombres :



Contrairement aux quantités compactes, qui sont d'un seul tenant, les nombres ont une structure granulaire, ils sont constitués de multiples fragments. De ce fait le mode d'évaluation de leur "grandeur" est très différent de celui des quantités compactes. Ceci constitue une grande différence de nature entre ces deux approches de la quantité. Nous allons y revenir.

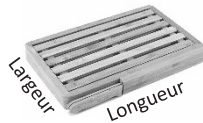
Terminologie : quantité et grandeur

Les deux termes "quantité" et "grandeur" ont des significations très proches. En fait ils sont presque synonymes. Pour faire référence au type de quantité observée sur l'objet (longueur, poids, etc.), on utilise plutôt le terme de grandeur. Mais on emploie aussi couramment ce même mot pour faire référence à son importance, son intensité (ou sa taille, son étendue, sa mesure, etc.). Si bien que dans les faits ces deux termes sont communément employés avec ces deux significations.

Exemples de quantités compactes

On rencontre dans la nature de nombreuses sortes de quantités (ou de grandeurs) compactes. On peut en observer plusieurs types sur un même objet : sa longueur, sa surface, son poids, sa densité, etc. L'appréhension de ces quantités compactes passe par nos perceptions physiques - principalement la vue, éventuellement le toucher. Exemples de grandeurs compactes :

- la longueur, la largeur, la hauteur, la profondeur, etc.



- les surfaces, régulières (carré, rectangle, etc.) ou non régulières (tache, carte, etc.), planes (table, mur, etc.) ou non planes (ballon, bouteille, etc.),



- les volumes, réguliers (cubes, cylindre, sphère, etc.) ou irrégulier (ampoule, télévision, légumes, etc.)



- mais aussi les "angles" - c'est "l'écartement angulaire" entre deux demi-droites, par exemple l'angle d'une part de gâteau, l'angle d'ouverture d'une porte, etc.



Puis il y a d'autres grandeurs physiques, comme le poids, la densité, etc. Enfin il y a encore d'autres sortes de quantités, de nature moins évidente, comme par exemple les proportions.

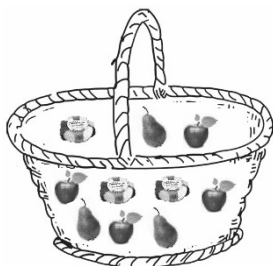
Une spécificité importante de ces quantités compactes, c'est qu'elles sont toutes de nature différente. Et on ne peut comparer entre elles que des quantités de même nature (les longueurs avec les longueurs, les poids avec les poids, etc.).

Les quantités granulaires : les nombres

Pour ce qui est des nombres, l'existence d'un groupe composé d'éléments séparés ne suffit pas à en faire naître automatiquement la perception. Pour que l'observateur puisse en voir un, il faut que parmi les éléments constituant le groupe - par exemple des pommes, ou des fruits, ou des articles d'alimentation, il en considère plusieurs comme équivalents entre eux en termes de quantité (du point de vue du décompte qu'il veut en faire). Alors ces éléments constitueront à ses yeux des unités (semblables entre elles), et c'est la quantité de ces unités qui constituera le nombre.

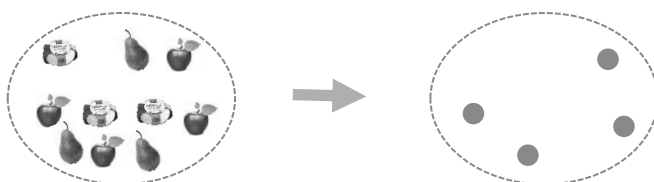
Le fondement de la notion de nombres : l'unité

Surgit alors la question absolument essentielle du type d'objet choisi comme unité par l'observateur. Dans un groupe de pommes les seuls objets présents sont des pommes, et ce sont donc les seuls qui peuvent être pris comme unités pour pouvoir observer un nombre dans ce groupe. Mais dans un panier contenant des pommes, des poires et des fromages :

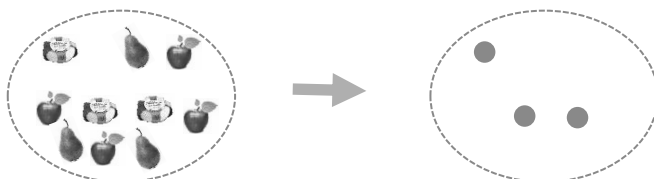


c'est à l'observateur qu'il appartient de choisir :

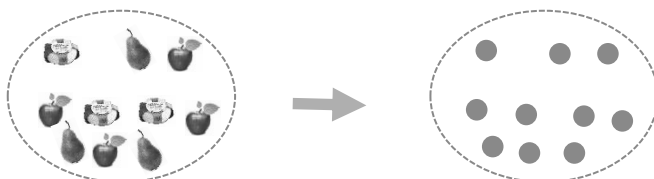
- si c'est le nombre de pommes qui l'intéresse (unité = pomme),



- ou bien le nombre de fromages (unité = fromage),



- ou encore si c'est le nombre total d'articles d'alimentation qu'il veut considérer (unité = pomme, poire ou fromage).



Selon le choix de l'unité le nombre sera différent. Le fondement de la notion de nombre est donc l'unité, et le nombre est la relation entre :

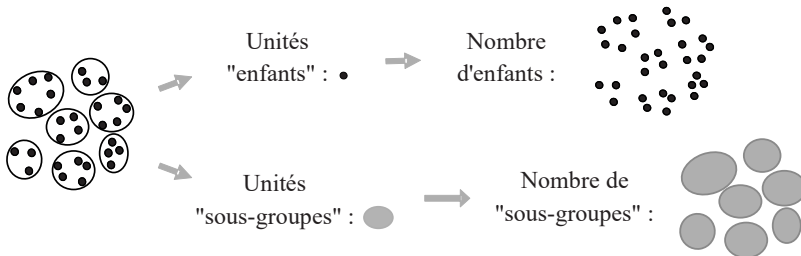
- l'unité, perçue individuellement (tout en étant présente en de multiples occurrences différentes dans le groupe),

- et la globalité du groupe, en tant que constituée de "plusieurs" de ces "unités".

Cette relation est caractéristique du nombre. Sa perception nécessite évidemment une conscience claire de ces deux notions :

- ✓ l'unité
- ✓ et la globalité, regroupant plusieurs unités.

Dans un groupe d'objets aucun d'eux ne va s'imposer de lui-même en tant "qu'unité" pour un observateur particulier. C'est chaque observateur qui, dans une situation donnée, va déterminer quels objets vont constituer pour lui des unités. Ainsi dans une école, pour les enseignants les enfants constituent des "unités". Mais les classes complètes constituent aussi pour eux des "unités de compte", tandis que les surveillants pourront considérer, eux, que ce sont les groupes d'enfants dans la cour qui sont les "unités de compte" importantes :



Il est clair que le choix de l'unité détermine directement le nombre perçu.

On voit dans cet exemple qu'on peut considérer comme "unités de compte" certains sous-groupes d'objets alors qu'ils ne comportent pas tous le même nombre d'unités "de base" (les différentes classes, ou les groupes dans la cour, ne comportent pas tous le même nombre d'enfants – unités de base). Nous verrons d'autres cas dans lesquels, au contraire, les différentes "unités de compte" seront caractérisées par le fait qu'elles comportent toutes, nécessairement, le même nombre d'unités de base. Ce sera le cas pour la construction des systèmes de numération.

Cette question des unités de compte est essentielle, car pour l'application des nombres et des calculs aux situations concrètes on constatera que le choix et la définition des unités (ou unités de compte) constituera une étape déterminante, d'abord dans l'analyse de la situation puis dans le traitement du problème. C'est pourquoi il est très important d'amener assez tôt les enfants à bien clarifier et approfondir cette notion d'unité dans un groupe d'objets. Toutefois elle ne devrait pas être approfondie dans sa complexité avant qu'ils aient acquis une familiarité suffisante avec la notion de nombre.

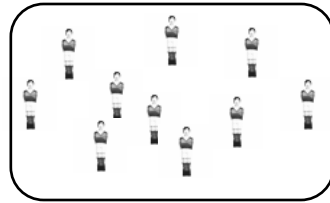
Similitudes et différences entre quantités compactes et granulaires

On voit que la perception de la quantité numérique granulaire – du nombre – est de nature très différente de celle des quantités compactes. Elle est tout aussi naturelle à l'esprit humain, mais nettement moins immédiate et spontanée. C'est pourquoi elle nécessite un certain entraînement pratique.

Un aspect important de cette différence entre quantités compactes et nombres, c'est qu'alors qu'il y a de nombreuses sortes de quantités compactes de nature différente : longueur, poids, volume, etc., pour ce qui est des groupes (quantités granulaires), quelle que soit la nature des éléments qui les constituent – des pommes, des personnes ou des voitures, le nombre, lui est toujours de la même nature. Il n'y a qu'une seule sorte de nombre. Si bien que contrairement aux quantités compactes, qu'on ne peut pas comparer entre elles si elles ne sont pas de même nature, on peut toujours comparer entre eux les nombres de groupes d'objets de nature différente : un nombre de bonbons à un nombre d'enfants, un nombre de voitures à un nombre de places de parking, etc.

Par ailleurs nous avons vu que pour les quantités compactes leur "taille" tient à leur étendue ou leur intensité. C'est donc là un aspect que tout un chacun perçoit immédiatement, directement,

sans aucun effort particulier. Tandis que pour les nombres l'étendue occupée par le groupe d'objets sur lequel on les voit n'est pas du tout indicative de leur "quantité" en tant que nombre : on peut percevoir un nombre très grand sur un groupe occupant un espace très restreint (comme le nombre de grains de riz dans un sac), ou au contraire un nombre petit sur un groupe occupant un espace très grand (comme le nombre des joueurs sur un terrain de football).

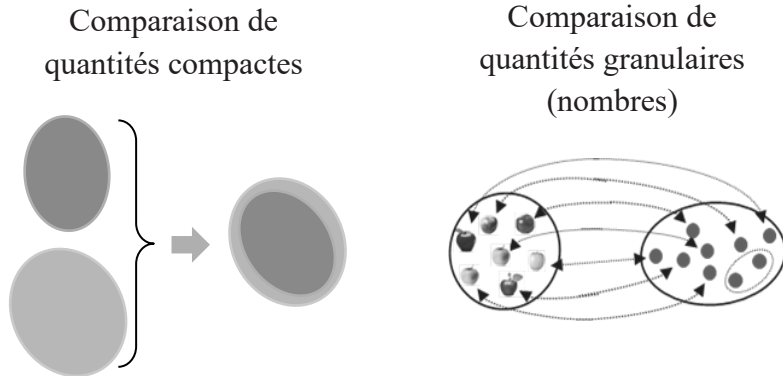


Cela veut dire que la grandeur "numérique" des nombres est de nature très différente de la grandeur simple et directe des quantités compactes (comme les longueurs ou les poids). Elle n'est pas équivalente à l'espace qu'occupent physiquement les groupes qui les portent. Leur perception est de nature différente.

Et évidemment, cette différence dans le mode d'appréhension des quantités numériques va se retrouver dans la façon dont on va les comparer.

Pour les quantités compactes, leur comparaison se fait par des rapprochements, voire des superpositions lorsque c'est possible : comparaison visuelle des grandeurs géométriques (longueurs, surfaces, volumes), ou des rapprochements dans le temps pour comparer des poids, en comparant les sensations musculaires, etc.

Tandis que pour les nombres cette comparaison devra être conduite selon un autre procédé, plus complexe, mais parfaitement adapté à la configuration particulière des nombres : l'appariement une par une des unités de chacun des deux nombres :



C'est comme cela – et uniquement comme cela – que se fait la comparaison entre deux nombres : par le procédé d'appariement entre les deux groupes-nombres, unité par unité. Selon le résultat de cet appariement on peut alors constater :

- soit qu'il s'agit du même nombre (ou que les deux nombres sont égaux) - lorsque toutes les unités ont été appariées exactement dans les deux groupes,
- soit que l'un est plus petit que l'autre : lorsque toutes les unités du premier ont été appariées, et qu'il en reste quelques-unes non appariées dans le second.

Le présent ouvrage a pour objet d'explorer la notion de nombre. Mais les nombres ne sont qu'une sorte particulière de quantité, et s'ils ont leur spécificité propre, ils ne peuvent être totalement dissociés des autres types de quantité. D'autant que ce sont eux qui vont permettre d'en acquérir la maîtrise. C'est pourquoi dans cette étude, bien que nous traitions principalement des nombres, nous serons amenés à parler de leurs relations avec les autres types de quantités.

Maintenant, avant d'entrer dans le vif du sujet, il va nous être indispensable de clarifier deux notions jumelles, essentielles pour toute démarche de connaissance, et particulièrement celle des nombres : l'identification et la reconnaissance des objets, en relation avec une troisième notion, celle de désignation.