

Pierre-Marie Portejoie

Les Nombres

Nature, utilisation et apprentissage

Le rôle du système de numération décimal

Remerciements

Je veux rendre ici hommage aux personnes qui m'ont accompagné pour la réalisation de ce projet, et particulièrement à Jean-Pierre Ferrier et à Gilbert Castellanet (Association Lire-Écrire). Par leur relecture, leurs encouragements et leurs suggestions, ils m'ont soutenu dans mon travail et aidé à progresser dans ma réflexion.

Qu'ils en soient chaleureusement remerciés.

Ce livre a été publié sur www.bookelis.com

ISBN : 979-10-227-9213-4

© Pierre-Marie Portejoie

V23c

Tous droits de reproduction, d'adaptation et de traduction, intégrale ou partielle réservés pour tous pays.

L'auteur est seul propriétaire des droits et responsable du contenu de ce livre.

PRÉSENTATION DE L'OUVRAGE

Ce livre est l'aboutissement ultime de l'aventure qu'a constitué pour moi l'exploration du domaine des nombres¹. Mon précédent ouvrage, "Fâché avec les nombres", mettait en évidence trois causes majeures des difficultés rencontrées dans leur apprentissage et leur maniement². Celui-ci apporte la clarification qui manquait pour appréhender la véritable nature de ces "objets" un peu insaisissables, en même temps qu'il explicite le rôle essentiel, mais très particulier, que joue le système de numération décimal dans leur "domestication", et donc leur apprentissage.

Dans le premier livre nous avons montré que ce que l'on entend habituellement par le terme de "nombres" peut correspondre à trois choses différentes :

- D'abord des numéros. C'est la première chose que l'enfant rencontre lorsqu'il découvre la fameuse comptine : "un, deux, trois, quatre, cinq, etc." Car dans cette comptine ces mots ne désignent aucunement les "vrais nombres" (des quantités), mais seulement des rangs successifs (des positions qui se suivent) dans une série : c'est ce qu'on appelle des numéros.
- Cette première distinction faite, on aborde la question des "vrais" nombres. Mais alors surgit une autre source de confusion : leurs désignations³ - les mots ou les chiffres par lesquels on les désigne (trois, sept, dix-neuf, ou 3, 7, 19). Beaucoup de gens tendent à penser que ces mots ou ces

¹ Il s'agit ici des nombres dits "arithmétiques", ceux que l'on désigne par les symboles 1, 2, 3 etc. En mathématiques l'usage s'est établi d'utiliser ce même terme de "nombre" pour désigner aussi d'autres notions, plus ou moins proches, mais différentes. On trouvera en annexe (section "Appendice épistémologique") une réflexion sur cette extension d'emploi de la dénomination de "nombre", à la lumière de la présente analyse.

² Il est vivement conseillé d'en consulter la vidéo de présentation sur YouTube.

³ Une désignation est un signe matériel (mot parlé, écrit, mais aussi image, dessin, etc.) utilisé pour faire référence à un objet, notamment lorsque celui-ci n'est pas présent - voir la rubrique "désignation" dans le glossaire.

chiffres SONT tout simplement les nombres. Il est essentiel de comprendre qu'il n'en est rien. C'est d'ailleurs un lieu commun d'observer que les mots ne sont pas "la même chose" que les objets qu'ils désignent. Malheureusement dans le cas des nombres, comme on ne sait pas très bien ce qu'ils sont, cela favorise la confusion avec leurs désignations.

- Pourtant les "vrais" nombres, ceux qui mesurent des quantités, existent bel et bien. Alors pourquoi ne parvient-on pas à en avoir une perception claire ? C'est que leur véritable nature se trouve brouillée par une troisième source de confusion, plus subtile et plus difficile à identifier.

C'est cette dernière confusion que nous voulons explorer ici. Elle touche cette fois-ci au cœur même de la notion de nombre en tant que "quantité numérique". Il nous faudra pour cela mettre en perspective deux notions, très proches l'une de l'autre : d'un côté la quantité numérique elle-même, et de l'autre la forme-nombre qui la porte. Cela nous conduira à expliciter le rôle tout à fait crucial que jouent les systèmes de numération, et notamment le système décimal. Ce rôle est malheureusement insuffisamment compris, ce qui n'est pas sans conséquence sur l'efficacité des méthodes d'apprentissage.

Après avoir clarifié la notion de quantité, et constaté que les nombres sont une sorte particulière de quantité, nous montrerons qu'en réalité "apprendre les nombres" ne signifie pas acquérir la maîtrise de "tous les nombres" en général, mais seulement d'une famille très particulière : ceux du système de numération décimal. Car les nombres "communs", ceux que nous rencontrons tous les jours dans notre environnement, nous verrons qu'il est en fait impossible de les reconnaître au-delà de trois. Mais nous montrerons comment, une fois qu'on a appris les "nombres" particuliers du système décimal, il est possible d'appliquer ces connaissances à tous les nombres quelconques (communs) observés dans notre environnement (et même aux autres quantités, bien qu'elles ne comportent pas a priori de nombres).

Toutefois pour réaliser cela il est nécessaire d'apprendre ces "nombres-là". Or nous verrons que la condition première et impérative de cet apprentissage - malheureusement totalement sous-estimée - est d'être en mesure de les identifier visuellement. Et c'est précisément à cela que servent les systèmes de numération.

Notons que cette étude sera conduite non pas à partir des désignations de ces nombres (les mots ou les chiffres par lesquels on les désigne), mais à partir de leurs perceptions visuelles effectives :



et au moyen d'expérimentations concrètes que nous ferons sur eux. De ce fait l'usage de leurs désignations ("huit, trois, sept, dix-sept", ou "8, 3, 7, 17") sera quasiment absent de cette présentation. On pourra s'en étonner. Mais le lecteur découvrira rapidement que, pour le but que nous nous sommes proposé - l'exploration de la nature des nombres - nous n'aurons pas besoin, sauf en de rares occasions, d'utiliser ces désignations. En effet, lorsqu'on dispose des objets eux-mêmes, dans le cas présent la perception des "vrais" nombres, on peut les étudier tout à loisir sans (presque) avoir besoin de les désigner.

Nous allons donc explorer ce que sont vraiment les "nombres" en tant que quantités numériques, quels sont les obstacles que l'on rencontre à les appréhender dans leur état naturel et à les manipuler, et par quel procédé - assez singulier - les systèmes de numération, et notamment le système décimal, vont nous permettre de contourner ces difficultés.

Nous concluons cet ouvrage par un examen des implications de ces constats pour leur apprentissage, et par des propositions de méthode pour une démarche efficace.

Je dois prévenir que ce livre, pas plus que le précédent d'ailleurs, n'a pas été rédigé en vue d'une présentation au grand

public. En effet, du fait du caractère novateur de cette recherche, il me fallait d'abord en établir un exposé détaillé, sans omettre d'en évoquer tous les aspects, même si quelques-uns sont moins susceptibles d'intéresser tout le monde. Ainsi certains passages (comme la présentation axiomatique des nombres) pourront paraître un peu fastidieux à des lecteurs non professionnels. Cela ne devrait toutefois pas les décourager de le lire, quitte à sauter tel ou tel passage plus aride⁴.

Enfin je précise que le contenu du présent ouvrage se limite à la clarification de la notion de nombre, et à l'explicitation du rôle déterminant que jouent les systèmes de numération pour leur identification et la maîtrise de ce domaine. Notamment il ne comporte pas la présentation complète du système de numération décimal et de ses "nombres canoniques"⁵. Un tel développement requerrait en effet un minimum d'espace, et les contraintes d'édition ne permettraient pas de l'inclure⁶.

Un plan général figure au tout début du livre. On trouvera en fin d'ouvrage les annexes suivantes :

- un appendice épistémologique⁷ sur l'extension de l'emploi de la désignation de "nombre" en mathématiques,
- un glossaire rappelant les définitions de termes techniques ou inhabituels utilisés (celles-ci figurent déjà pour une bonne part dans le corps du texte ou en note de bas de page),
- un index permettant, pour un certain nombre de mots clés, d'en retrouver toutes les occurrences dans le corps du texte,
- et enfin un plan détaillé de l'ensemble de l'ouvrage.

⁴ Un ouvrage de synthèse à destination du grand public sera bientôt disponible.

⁵ Cette notion sera explicitée dans le corps du livre.

⁶ Cette présentation fait l'objet d'un troisième ouvrage : "Les nombres canoniques du système de numération décimal". On y trouvera l'examen détaillé de la construction de ces nombres et du fonctionnement de l'ensemble du système.

⁷ L'épistémologie est la partie de la philosophie qui s'occupe de l'étude des sciences, de leurs principes et de leurs méthodes. Les analyses présentées dans le présent ouvrage ont une forte dimension épistémologique.

PLAN GÉNÉRAL

CHAPITRE 1 - LA QUANTITÉ ET LES NOMBRES

1-1 – Quantités étendues et quantités granulaires	15
1-2 - Les nombres : des quantités granulaires	36
1-3 - Une notion essentielle : celle de "forme-nombre"	51
1-4 - Résumé du chapitre 1 : Quantités, Nombres et Formes-nombres	56

CHAPITRE 2 - QUANTITÉ NUMÉRIQUE ET FORME-NOMBRE LA VÉRITABLE NATURE DES NOMBRES

2-1 - Quantité numérique et forme-nombre	59
2-2 - Le "vrai" nombre est la quantité numérique	65
2-3 - La véritable nature des nombres "quantités numériques"	69
2-4 - Formulation axiomatique : fondations nécessaires pour pouvoir construire un discours logique (un raisonnement mathématique) sur les nombres	74
2-5 - Résumé du chapitre 2 : Quantité numérique et Forme-nombre La véritable nature des nombres	83

CHAPITRE 3 – L'IMPOSSIBILITÉ DE RECONNAÎTRE LES NOMBRES DANS NOTRE ENVIRONNEMENT

LA SOLUTION APPORTÉE PAR LES SYSTÈMES DE NUMÉRATION : NOMBRES COMMUNS ET NOMBRES CANONIQUES

3-1 - Identifier et reconnaître un objet	85
3-2 - Le problème de l'identification des quantités numériques	91
3-3 - La solution très singulière apportée par les systèmes de numération	112
3-4 - "Nombres" communs et "nombres" canoniques	121
3-5 - Résumé du chapitre 3 : "Nombres" communs et canoniques	128

CHAPITRE 4 - LES "NOMBRES" COMMUNS : CE SONT LES FORMES-NOMBRES NATURELLES DE NOTRE ENVIRONNEMENT (SANS SYSTÈME DE NUMÉRATION)

4-1 - Les nombres communs : c'est l'apparence "naturelle" des nombres dans notre environnement	131
4-2 - Nos facultés natives (limitées) pour les appréhender et les manier D'abord (1) les identifier (et alors les désigner)	133
4-3 – Ensuite nos autres capacités natives sur les nombres communs Les comparer (2) et les additionner (3)	139
4-4 - Conclusion sur les "nombres" communs : nos capacités natives	149

CHAPITRE 5 - LES "NOMBRES" CANONIQUES : DES FORMES-NOMBRES ARTIFICIELLES CONSTRUITES PAR LES SYSTÈMES DE NUMÉRATION

5-1 - Les nombres canoniques : ce sont des formes-nombres artificielles	151
5-2 – Le système de numération décimal et son chaînon manquant	158
5-3 – Visualiser le dispositif de construction des formes-nombres canoniques décimales	167
5-4 – D'où viennent les dénominations des nombres canoniques	178
5-5 – Qu'est-ce que les "calculs"	185
5-6 – Les "nombres" canoniques décimaux et les "vrais" nombres	190
5-7 - Nos dispositions pour manier les "nombres" canoniques du système décimal : la nécessité d'un apprentissage	196
5-8 - Conclusion sur les "nombres" canoniques La nécessité d'un apprentissage	202

CHAPITRE 6 – L'UTILISATION DES "NOMBRES" DU SYSTÈME DÉCIMAL (LES NOMBRES CANONIQUES) POUR TRAITER LES PROBLÈMES CONCRETS DE QUANTITÉS

6-1 - Que souhaitons-nous faire avec les quantités ?	205
6-2 - Rappel sur le maniement direct des quantités sans système de numération	208
6-3 - Comment on utilise les "nombres" canoniques du système décimal pour manier les quantités	213
6-4 - Comment on trouve la correspondance quantitative entre les quantités concrètes à manipuler et les nombres (canoniques) correspondants	216
6-5 - Conclusion sur le traitement des problèmes concrets par le moyen des nombres	224

CHAPITRE 7 - L'APPRENTISSAGE DES NOMBRES

7-1 - Les différents niveaux d'appréhension des nombres	227
7-2 - Les démarches d'apprentissage traditionnelles à la lumière de cette analyse	238
7-3 - Propositions pour une démarche graduelle et complète d'apprentissage des nombres	251

ANNEXES

Appendice épistémologique (mathématique)	255
Glossaire	269
Index	295
Plan détaillé	301

Les Nombres

Nature, utilisation et apprentissage

Le rôle du système de numération décimal

CHAPITRE 1

LA QUANTITÉ ET LES NOMBRES

1-1 - QUANTITÉS ÉTENDUES ET QUANTITÉS GRANULAIRES

Qu'est-ce qu'un nombre ?

C'est tout simplement une "quantité" qu'on peut percevoir sur un groupe d'objets. Mais attention ! Les nombres (ou quantités "numériques") ne sont pas le seul type de quantité. Il en existe d'autres. Commençons par préciser ce qu'est exactement une quantité - qu'on appelle aussi une grandeur.

Qu'est-ce qu'une quantité (ou une grandeur) ?

Une quantité (ou grandeur) est un aspect que l'on perçoit sur les objets, au même titre que leur forme ou leur couleur. Par exemple la longueur d'une table est une grandeur, de même que le volume d'une bouteille, ou le poids d'un colis. Ce qui caractérise la notion de grandeur (ou de quantité), c'est qu'on peut les comparer sous l'angle plus ou moins avec d'autres grandeurs semblables observées sur d'autres objets (ou sur les mêmes) – par exemple "La nappe est plus longue que la table", autrement dit "la longueur de la nappe (quantité) est plus grande que la longueur de la table (quantité)".

L'idée de comparaison est ainsi au fondement de la perception des grandeurs ou quantités.

Mais à cette notion de quantité est également associée une autre propriété, elle aussi très importante : lorsqu'on regroupe des objets qui portent des grandeurs de même nature, celles-ci peuvent s'additionner. Par exemple lorsqu'on met deux tables bout à bout, leurs longueurs s'additionnent (voir d'autres exemples dans les pages suivantes).

À noter que ce n'est pas le cas de toutes les "quantités"⁸. Néanmoins celles qui donnent lieu à des développements vraiment intéressants (qui constitueront ce qu'on appelle les "mathématiques") sont celles qui ont également la propriété de s'additionner. Nous réserverons donc la dénomination de quantités à celles qui peuvent à la fois se comparer et s'additionner.

Terminologie : Grandeur et quantité

Les termes "quantité" et "grandeur" sont presque synonymes. On tend à utiliser plutôt le terme grandeur pour faire référence au type de grandeur observée sur l'objet, tandis que celui de quantité désigne plutôt son importance, son intensité (ou sa taille, son étendue, sa mesure, etc.). De ce fait c'est plutôt la quantité qui est le support de la comparaison. Toutefois on emploie souvent indifféremment les deux termes avec ces deux significations.

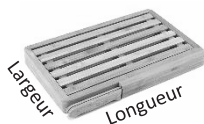
On peut percevoir dans la nature de nombreuses sortes de grandeurs : la longueur, la surface, le poids, la densité, etc. Sur un même objet on peut en observer plusieurs types. Leur appréhension passe par nos perceptions physiques - principalement la vue, éventuellement le toucher.

De nos jours, lorsqu'on parle de quantité on pense très souvent d'abord aux nombres (les quantités numériques), car ceux-ci sont omniprésents. Mais il y a d'autres sortes de quantités (ou de grandeurs), qu'on appréhende de façon non numérique.

⁸ Il existe en effet des quantités - comme l'intensité du parfum d'une fleur, ou la douceur d'une caresse - qui, tout en pouvant donner lieu à des comparaisons, peuvent difficilement être additionnées. On peut comparer l'intensité de deux parfums, mais on peut difficilement parler de les "additionner" exactement.

D'abord celles qu'on appelle en mathématiques les grandeurs "géométriques"⁹. Ce sont celles que nous voyons tout autour de nous sur les objets de notre univers :

- les grandeurs linéaires (à une seule dimension) : longueur, largeur, hauteur, profondeur, etc.



- les surfaces, régulières (carré, et le rectangle, etc.) ou non (tache, carte, etc.), planes (table, mur, etc.) ou non planes (ballon, bouteille, etc.),



- les volumes, réguliers (cubes, cylindre, sphère, etc.) ou irrégulier (ampoule, télévision, légumes, etc.)



- mais aussi les "angles" - c'est "l'écartement angulaire" entre deux demi-droites, par exemple l'angle d'une part de gâteau, l'angle d'ouverture d'une porte, etc.



⁹ Le terme "géométrie" est composé de "Geo", qui fait référence au globe terrestre, et de la racine "metre", qui signifie mesure. Il désigne toutes les grandeurs liées à l'espace (longueur, surface, volume, positions, orientations, etc.) qui sont immédiatement perçues par tout être humain.

Puis il y a d'autres quantités physiques, comme le poids, la densité, etc. Enfin il y a encore d'autres sortes de quantités, de nature moins évidente, comme par exemple les proportions.

Bien entendu seules peuvent être comparées entre elles ou additionnées des quantités de même nature. Nous y reviendrons bientôt sur des exemples.

Deux types fondamentaux : Les quantités étendues (ou continues) et les quantités granulaires

Dans la nature on rencontre deux types de quantités :

- Un premier type : celles qui apparaissent d'un seul tenant - comme la longueur d'une table ou le poids d'une chaise - au sein desquelles on ne distingue aucunes parties ou morceaux séparés. On peut dire que ce sont des quantités "étendues", car leur "grandeur" tient à cette étendue (spatiale ou perceptive). Exemples :



Longueurs (étendues)



Surface (étendue)

Nous les appelons également quantités continues, car on ne perçoit aucune fragmentation dans leur homogénéité interne.

À noter que chaque quantité de ce type, longueur, surface, poids, est perçue d'une certaine façon qui lui est propre : dans un objet matériel (comme par exemple un ballon), la perception de sa surface est très différente de celle de son volume ou son poids.

- Puis il y a un second type de quantité, qui apparaît sur des ensembles constitués de plusieurs objets ou morceaux séparés – ce que nous les appelons des quantités granulaires :

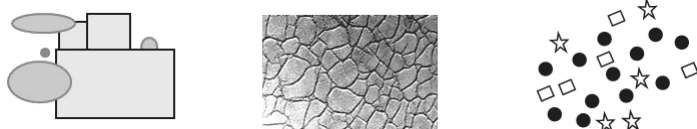


Lorsque les différents morceaux dont est constituée ce type de quantité sont considérés par l'observateur comme équivalents les uns aux autres en termes de quantité (du point de vue de l'usage qu'il veut en faire), alors ils constituent à ses yeux des "unités" semblables entre elles, et la quantité de ces "morceaux" ou "unités" constitue un nombre.

Concrètement ces quantités granulaires peuvent être **homogènes**, c'est-à-dire constituées de morceaux semblables (au moins par leur forme) :



ou **hétéroclites** - constituées de morceaux différents, par leur forme ou leur nature :



Dans tous les cas on peut y percevoir des "nombres", même si ceux-ci apparaissent plus spontanément dans les quantités homogènes (parce que leurs divers éléments, partageant une forme ou une nature commune, y apparaissent plus naturellement comme des "unités" équivalentes les unes aux autres). Pour cette raison dans la suite, afin de faciliter l'appréhension de cette notion, nous présenterons toujours les quantités granulaires, donc potentiellement porteuses de

nombres, sous une apparence homogène (c'est à dire constituées de morceaux manifestement semblables).

Terminologie

Notons qu'en mathématiques ces quantités granulaires homogènes sont appelées des quantités discrètes (l'adjectif "discret", qui a la même origine étymologique que "secret", signifiait à l'origine "séparé"). Pour notre part nous laisserons de côté cette qualification à consonance un peu ésotérique, pour en rester à l'appellation de quantités granulaires.

Ainsi les quantités granulaires se prêtent naturellement à une appréhension numérique, ce qui n'est pas le cas des quantités étendues, pour lesquelles le mode d'appréhension naturel est de type "compacte". Ceci constitue une grande différence de nature entre ces deux approches de la quantité.

Propriétés communes mais différence de nature entre ces deux types de quantité

Quel que soit leur type, la caractéristique essentielle des quantités (mais également leur utilité) est la comparaison, en termes de plus, moins, ou autant (ou égal). Même les simples termes de "beaucoup" ou "peu" sont déjà des comparaisons implicites, car "beaucoup" n'a de sens qu'en rapport à une référence : beaucoup par rapport à ... quelque chose. D'ailleurs les simples qualificatifs "grand" et "petit" contiennent déjà une notion de rapport : c'est toujours grand ou petit "par rapport" à quelque chose.

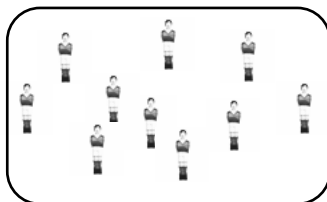
Ce sont ces comparaisons qui engendrent la notion de "grandeur". Toutefois, comme nous l'avons dit, pour que ces grandeurs puissent être considérées scientifiquement comme des quantités il faut qu'elles soient également susceptibles d'additions (par regroupement des objets physiques qui les portent).

Cela étant il faut noter que ces comparaisons et additions ne peuvent se faire qu'entre quantités d'un même type. Prenons l'exemple de la longueur d'une planche et d'un nombre de pommes.



Ce sont toutes deux des quantités car on peut comparer chacune d'elles à d'autres, dans la même catégorie, en termes de plus petit, égal ou plus grand (les longueurs de deux planches entre elles ou les nombres de deux groupes de pommes entre eux). On peut les additionner dans les mêmes conditions. Mais on ne peut pas comparer ou additionner une quantité de l'un des types - une longueur, avec une quantité de l'autre type - un nombre. On perçoit bien qu'il s'agit de quantités de natures fondamentalement différentes.

Comme nous l'avons dit la "grandeur" des quantités continues tient à leur étendue. C'est un aspect que tout un chacun perçoit spontanément, sans aucun effort particulier. Tandis que pour ce qui concerne les nombres (les quantités numériques), l'espace (ou l'étendue) occupé par le groupe d'objets sur lequel on les "voit" n'est pas du tout indicatif de leur grandeur en tant que nombre : on peut percevoir un nombre très grand sur un groupe occupant un espace très restreint (comme le nombre de grains de riz dans un sac), ou au contraire un nombre petit sur un groupe occupant un espace très grand (comme le nombre des joueurs sur un terrain de jeu).



Cela veut dire que la grandeur "numérique" des nombres est de nature très différente de la grandeur "compacte" des quantités étendues (comme les longueurs ou les poids). Elle n'est pas du tout matérialisée par l'espace qu'occupent physiquement les

groupes qui "portent" ces nombres. De ce fait cette quantité numérique granulaire – le nombre – est perçue de façon nettement moins immédiate et spontanée que l'étendue compacte des grandeurs géométriques (ou d'autres quantités continues). Ceci constitue une différence fondamentale de nature entre ces deux types de quantités.

Cette spécificité de la quantité numérique, on peut toujours essayer de "l'expliquer" (c'est-à-dire de guider quelqu'un vers sa perception). Mais il faut bien voir que, même si quelqu'un l'a bien perçue clairement, il lui est impossible de "transmettre" cette perception à une autre personne par du langage. C'est à chacun de la percevoir pour lui-même. Cette remarque est très importante, car cette expérience de perception constitue le premier échelon de l'apprentissage des nombres. Il est donc essentiel de ne pas la négliger, et d'abord de bien comprendre ce mécanisme pour pouvoir lui accorder toute l'attention nécessaire.

Nature psychique de la perception des quantités

Pourquoi cette perception des quantités, et notamment des quantités numériques, est-elle si personnelle ? Pour bien saisir cela, il faut comprendre que si ces quantités sont des aspects perçus sur des objets, il ne s'agit pas d'une perception¹⁰ physique ordinaire, mais d'une perception psychique. Cet aspect particulier perçu sur l'objet (ou le groupe d'objets) n'acquière pas sa nature de quantité du fait que celle-ci soit directement "visible" (perceptible) par tous, car ce n'est pas le cas. C'est chaque observateur qui percevra ou non cet aspect de quantité granulaire, en fonction de l'utilité qu'il y trouvera (comparaison, évaluation).

¹⁰ Une perception (ou sensation) est la composante la plus élémentaire de notre expérience vécue. Les perceptions physiques, qu'on appelle couramment des "sensations", sont ce que l'on ressent physiquement. On les met en relation avec des organes du corps qu'on appelle les organes des sens. Mais il existe d'autres perceptions, purement intérieures, que nous appelons les perceptions psychiques (voir glossaire).

Cette "quantité numérique" est alors perçue comme autre chose que le groupe d'objets sur lequel on l'observe, comme une de ses propriétés. Par conséquent on peut dire qu'elle constitue par elle-même un "objet" (de même qu'on peut considérer la couleur d'une rose comme un "objet" en soi dans notre mental). Mais cet "objet quantité" n'a pas la matérialité du groupe d'objets concrets sur lequel on l'observe. D'ailleurs il est possible qu'on ne la perçoive pas sur ce groupe, soit qu'on ne la "sente" pas, soit qu'on n'y prête pas attention. Elle est donc un objet "psychique", qui n'existe que dans le mental¹¹ de celui qui la perçoit.

Néanmoins la référence aux nombres est tellement répandue (sous forme de noms de nombres ou de chiffres) qu'on tend à considérer ceux-ci comme un aspect "matériel" des groupes d'objets (le qualificatif "matériel" désigne en effet précisément : ce qui est perceptible à tout le monde en même temps, et supposément de la même façon).

L'illusion de la perception des quantités par des machines

Un argument qu'on évoque parfois pour asseoir le caractère "matériel" des quantités est leur utilisation par des machines, et notamment des ordinateurs. On utilise en effet couramment celles-ci pour effectuer des "mesures" et des "comparaisons" de quantités, voire pour prendre des "décisions" à partir de ces "évaluations". Cela signifie-t-il que ces machines aient une forme de conscience de la quantité, au même titre que les êtres humains ?

En réalité une machine, même s'il s'agit d'un ordinateur, n'a pas de "conscience", et donc pas à proprement parler de "perceptions", dans le sens que ce terme a pour une personne humaine. Dire qu'une machine "perçoit" quelque chose, cela signifie simplement qu'un signal mécanique ou électronique

¹¹ L'adjectif (et le nom) mental désignent tout ce qui existe pour une personne dans son "monde intérieur", sans référence à une existence matérielle (extérieure) dont puissent témoigner d'autres personnes (voir glossaire).

apparaît sur un capteur qui lui est relié, puis que la machine, appliquant une routine qui lui a été implantée, détecte ce signal. Ce faisant elle n'a aucune conscience de ce qui est en train de se dérouler. Elle ne poursuit pour elle-même aucun but dans ces opérations, et n'éprouve aucun intérêt pour le signal ainsi recueilli ni pour sa mesure. Ce n'est pas elle qui a établi ni mis en place la procédure qu'elle suit. Une machine, y compris un ordinateur, est un objet inerte, qui n'a aucune capacité d'existence et de fonctionnement autonome indépendamment de l'homme qui l'a construit, qui la fait fonctionner et la dirige directement ou par programmation. Elle se contente d'exécuter les tâches mécaniques ou électroniques qu'on lui a prescrites, dans un but qui n'a pour elle aucun sens ni aucun intérêt :

- elle recueille des données, sous forme de signaux mécaniques ou électroniques,
- puis les transfère dans une mémoire, ou vers d'autres circuits, mécaniques ou électroniques, afin de les utiliser comme signal entrant dans un traitement mécanique ou électronique.

Et si une "comparaison" est incluse dans ce processus de traitement, il ne s'agit là encore que d'une simple manipulation mécanique ou électronique combinant ce signal à d'autres valeurs de signaux préalablement enregistrés. À partir de là la machine "choisira" - par une procédure mécanique qui lui aura été implantée - l'action à entreprendre conformément au programme prescrit.

Dans toutes ces actions la machine n'effectue ni "évaluation" ni "comparaison" pour elle-même. L'utilisation même du pronom "elle" induit déjà une connotation anthropomorphique trompeuse. Dans le cas d'une machine, de telles formulations anthropomorphique (comme mesurer et comparer) indiquent simplement qu'il s'agit pour elle d'effectuer des actions mécaniques ou électroniques qui ont été programmées sur elle par un opérateur : détecter des signaux matériels et les enregistrer, ou les transférer sur d'autres circuits, ou encore les

afficher sur un compteur. Pour la machine il n'y a là en réalité ni "évaluation" ni "comparaison". Il n'y a que des successions d'actions automatiques gouvernées par des modèles préalablement enregistrés.

Les notions de quantité et de comparaison sont des perceptions psychiques qui ne peuvent exister que dans l'esprit d'une personne capable de les percevoir consciemment en tant que telles, dans le but de les utiliser en relation avec ses propres buts. À noter que ce n'est cependant pas une exclusivité de l'espèce humaine, puisque bon nombre d'animaux - à la différence des machines - sont eux aussi capables pour eux-mêmes de comparer les grandeurs (toujours dans le but d'orienter leur action).

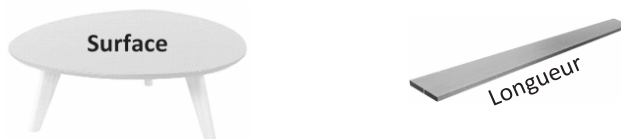
Les quatre niveaux de manipulation des quantités

La quantité est une propriété observée sur des objets. C'est un de leurs aspects qui nous importe beaucoup, auquel nous attachons beaucoup d'importance. Elle nous permet de les comparer, notamment dans le but d'en tirer des conclusions pour des actions que l'on se propose d'entreprendre sur eux. Par exemple si l'on me propose des parts de tarte au citron, selon que je suis gourmand ou frugal (et que j'aime ou non le citron) j'en prendrai une grande part ou une petite part. Mais pour pouvoir faire cela il faut que j'appréhende la grandeur (c'est-à-dire la quantité) de chacune des parts de tarte qui me sont proposées, puis que je les compare. De la même façon, si avec un ami nous devons peindre deux murs dans une pièce, nous allons commencer par appréhender leurs surfaces respectives (qui sont des quantités) et les comparer, afin de nous répartir la tâche en fonction de notre niveau d'expertise en peinture (ou de notre courage).

La manipulation des quantités comporte quatre niveaux possibles : les appréhender, les comparer, les identifier, et enfin les combiner dans des additions ou des soustractions.

1. **Appréhender** les quantités - Appréhender quelque chose (un objet, physique ou psychique) signifie reconnaître sa présence, le "saisir" d'abord mentalement en tant qu'objet, en le percevant comme distinct de son environnement. Cela nécessite d'abord de le percevoir, mais il s'y ajoute une action psychique consistant à le "saisir" mentalement en tant qu'objet spécifique¹².

Appréhender une quantité c'est donc d'abord appréhender un objet, puis reconnaître sur cet objet la présence d'un "sous-objet" psychique : une quantité.



Une fois cette quantité appréhendée on peut l'utiliser, porter sur elle des jugements, interagir avec elle, etc. Elle est un des aspects essentiels des objets qui la portent, et le jugement qui lui est automatiquement associé est la comparaison (plus ou moins).

2. **Comparer** les quantités - Tout le monde sait ce que signifie comparer deux quantités : c'est fondamentalement regarder si l'une est (ou peut être) contenue dans l'autre, ou l'inverse.



¹² Appréhender un objet comporte en fait deux aspects : d'une part le percevoir comme distinct de l'environnement général, mais aussi, en même temps (sauf exception), comme une globalité composée de diverses parties constituant un tout (une perception globale composée de multiples perceptions élémentaires). C'est le fait de l'appréhender comme une globalité qui en fait un objet.

À noter que cela introduit ipso facto la notion d'égalité. Si les deux quantités coïncident exactement, on dit qu'elles sont égales.

La comparaison est une activité innée, que chacun pratique naturellement depuis le tout début de sa vie. Toutefois cela suppose de pouvoir "superposer" les quantités, ce qui n'est pas toujours possible.

3. **Identifier** les quantités - Que signifie exactement identifier un objet ?

Cela signifie non seulement l'appréhender, mais aussi lui reconnaître des caractères spécifiques, puis les mémoriser, afin de pouvoir ultérieurement le reconnaître. On peut mémoriser l'image et les propriétés de n'importe quel objet, donc en particulier les quantités.

Souvent on procède en plusieurs étapes. On identifie d'abord une catégorie d'objets, c'est-à-dire les caractères communs aux objets constituant cette catégorie. On parle alors, pour les objets de cette catégorie générale, d'un objet "générique"¹³ - par exemple un "animal". Puis l'on distingue l'objet lui-même au sein de cette catégorie, par des caractères qui lui sont propres - par exemple un chat. Pour des objets très spécifiques il peut y avoir beaucoup plus de deux étapes (ou de deux niveaux d'analyse).

On peut appréhender un objet sans être nécessairement en mesure de l'identifier. Et lorsqu'on identifie, c'est toujours avec un certain degré de précision (et donc d'imprécision) : je peux identifier une catégorie d'animaux comme étant des oiseaux, sans pour autant être capable d'identifier précisément les différentes espèces auxquelles ils appartiennent.

¹³ Rappelons que l'adjectif "générique" qualifie un caractère ou une propriété qui s'applique à tous les objets appartenant à la catégorie dont on parle – ici les animaux, c'est-à-dire les êtres vivants capables de se déplacer.

Terminologie : "Identifier" et "reconnaître"

Identifier signifie percevoir les spécificités d'un objet, qui le distinguent d'autres objets ressemblants. Tandis que reconnaître signifie percevoir à nouveau des caractéristiques spécifiques déjà connues : je reconnais une personne que je connais déjà, que j'avais identifiée préalablement. On identifie toujours un objet avec un certain degré de précision, et la reconnaissance ne peut se faire qu'avec la précision avec laquelle l'objet avait été identifié à l'origine. En toute rigueur on ne devrait donc pas utiliser ces deux termes comme totalement synonymes. Leur sens est néanmoins proche, il arrive souvent que l'on emploie l'un pour l'autre. Dans le cadre de la présente étude cette nuance néanmoins d'importance, et nous nous efforcerons de respecter cette nuance par un emploi approprié des termes, sauf lorsque le contexte ne laisse pas planer l'ambiguïté.

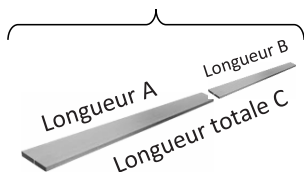
Identifier un objet c'est donc s'en constituer une référence mnésique (mémorielle), de façon à pouvoir le reconnaître si on le rencontre à nouveau.

Nous ne présentons cette activité d'identification qu'en troisième position car sa mise en œuvre utilise la comparaison. Identifier les spécificités d'un objet suppose en effet d'être en mesure de le différencier par rapport à d'autres objets semblables ou de même nature, ce qui en soit est une activité de comparaison. Par ailleurs l'identification n'a d'intérêt que dans la perspective d'une reconnaissance ultérieure (positive ou négative). Or celle-ci passe elle-même par une à comparaison du nouvel objet observé dans le présent par rapport à la référence mentale que l'on s'est constituée antérieurement, afin d'y trouver une similitude, voire constater une identité.



L'identification peut être plus ou moins précise, selon la précision de la perception d'origine, et par suite de la référence que l'on mémorise. Le degré de précision de l'identification, défini par la précision de cette mémorisation, détermine le degré de précision de la reconnaissance ultérieure de l'objet.

4. **Additionner** les quantités – Il est tout à fait possible d'additionner les quantités. Comme elles n'existent que comme propriétés observables sur des objets, leur "addition" n'existe qu'à travers des regroupements (juxtaposition) des objets qui les portent. Ceux-ci ont pour effet de produire de nouveaux objets combinés porteurs d'une nouvelle quantité. Dans la suite de cet ouvrage nous symboliserons ces regroupements "additifs" par une accolade :



Ainsi la juxtaposition de deux objets portant des longueurs produit un nouvel objet combiné porteur d'une nouvelle longueur. On dira alors que la nouvelle longueur obtenue (sur l'objet combiné) est l'addition des longueurs des deux objets de départ.

La soustraction est une opération inverse à l'addition : on peut soustraire une quantité B à une autre A, ce qui correspond matériellement à la séparation d'une partie de l'objet qui porte cette quantité :

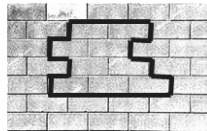
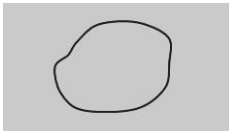


La longueur C est le résultat de la soustraction de la longueur B à la longueur A.

À noter que l'addition (et la soustraction), lorsqu'elles portent sur les quantités, sont des notions tout à fait spécifiques. Elles sont différentes de celles de regroupement (et de séparation), qui elles s'appliquent aux objets qui portent ces quantités. Ce n'est pas parce que l'addition des quantités est inséparable du regroupement des objets qu'il s'agit de la même notion.

La perception d'une quantité nécessite toujours la perception d'un contour qui la délimite

Qu'il s'agisse de quantité étendue ou granulaire, pour qu'elle puisse être définie il faut qu'elle soit délimitée par un **contour**, qui sépare ce qui en fait partie de ce qui n'en fait pas partie.



La première notion qui fonde la quantité est la comparaison. Or pour qu'une comparaison entre quantités soit possible il est indispensable que leurs "contenus" soient clairement délimités. C'est cette délimitation que nous appelons leur **contour**.

Celui-ci peut être implicite s'il n'y a aucune ambiguïté sur la délimitation de la quantité :



Dans d'autres cas il est nécessaire de le préciser, soit à partir d'éléments de l'environnement qui le constituent, soit par une définition arbitraire de l'observateur.

Cette observation vaut aussi bien pour les quantités étendues que granulaires.

Utilisations possibles des quantités étendues (non numériques) : intéressantes mais limitées

La quantité est l'un des aspects des objets. On peut l'utiliser pour faciliter les managements que nous souhaitons faire sur eux. Par exemple :

- le contenu restant dans cette bouteille tiendra-t-il dans ce bol,
- est-il possible de faire passer ce meuble à travers cette porte,
- Comment répartir cette tarte également entre quatre convives, etc.

Ces utilisations recourent toutes à la comparaison entre quantités. Observons que cette comparaison nécessite leur appréhension préalable. Cela se fait simplement en percevant leur présence sur des objets, et en constatant leur nature de quantité. Par exemple :



Ensuite cette comparaison entre quantités non numériques est plus ou moins facile à faire (à percevoir). Elle est facile lorsque l'une d'elle peut être visiblement placée ou superposée à l'intérieur de l'autre :



Dans d'autres cas cette comparaison peut nécessiter des manipulations complexes, parfois même être très difficilement praticable :